Методы решения тригонометрических уравнений.

1) Решение простейших тригонометрических уравнений.

$$\sin \pi\sqrt{x} = -1$$

$$\pi\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2n,\ n \in Z$$

По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 2n \geq 0,\ n \in Z \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2,\ n \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \geq \frac{1}{4},\ n \in Z \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2,\ n \in N \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ответ: $x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2,\ n \in N$

2) Решение тригонометрических уравнений разложением на множители.

$$\frac{1}{\sin x} - 1 = ctgx - \cos x;\ x \neq \pi n,\ n \in Z$$

$$\frac{1 - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x}$$

$$1 - \sin x = \cos x(1 - \sin x)$$

$$1 - \sin x - \cos x(1 - \sin x) = 0$$

$$(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

$\sin x = 1$ или $\cos x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\qquad x = 2\pi l,\ l \in Z$

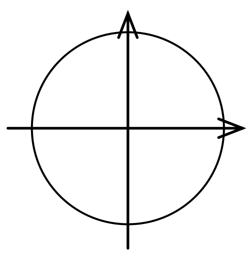
$$\sqrt{1-x}\,(x - 5) = 0$$

$x = 1$ или $x = 5$

$$\begin{cases} x = 5 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$$

решений нет

Отметим полученные решения и область определения на тригонометрическом круге.



Решением уравнения является:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$

3) Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям.

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

$$4 - 2\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3\sin^2 2x = 0$$

$$\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0$$

Пусть $\sin 2x = y$, тогда $\qquad D_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - ac$

$y^2 - 8y + 4 = 0$

$D_1 = 12$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$

$y_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$

$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$ или $\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3}$

$2x = (-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z$ $\qquad$ Т.к. $|\sin 2x| \le 1$

$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$ $\qquad$ при $x \in R$, то корней нет.

Ответ: $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$

4) Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение.

$\sin \pi x^2 = \sin \pi(x^2 + 2x),\ x \in R$

$\sin \pi x^2 - \sin \pi(x^2 + 2x) = 0,\ x \in R$

$2 \sin(-\pi x) \cos \pi(x^2 + x) = 0,\ x \in R$

$2 \sin(-\pi x) = 0$ $\qquad$ или $\qquad$ $\cos \pi(x^2 + x) = 0$

$\pi x = \pi n,\ n \in Z$ $\qquad$ $\pi(x^2 + x) = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$x = n,\ n \in Z$ $\qquad$ $x^2 + x = \frac{1}{2} + k,\ k \in Z$

$x^2 + x - \left(\frac{1}{2} + k\right) = 0,\ k \in Z$

$D = 3 + 4k \ge 0$

$k \ge -\frac{3}{4}$ $\qquad$ $k = 0,1,2,3\ldots$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3 + 4k}}{2},\ k = 0,1,2,3\ldots$

Ответ: $x = n,\ n \in Z$; $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3 + 4k}}{2},\ k = 0,1,2,3\ldots$

5) Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.

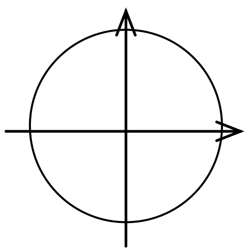
$tg(x - 15^0)\, ctg(x + 15^0) = \frac{1}{3}$

а) Найдем область определения функции.

$\begin{cases} \cos(x - 15^0) \ne 0 \\ \sin(x + 15^0) \ne 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 15^0 \ne 90^0 + 180^0 k,\ k \in Z \\ x + 15^0 \ne 180^0 n,\ n \in Z \end{cases}$

$\begin{cases} x \ne 15^0 + 90^0 + 180^0 k,\ k \in Z \\ x \ne -15^0 + 180^0 n,\ n \in Z \end{cases}$



Областью определения данного уравнения является:

$x \neq 15^0 + 90^0 + 180^0 k, k \in Z$

$x \neq -15^0 + 180^0 n, n \in Z$

б) Решим данное уравнение.

$$\frac{\sin(x-15^0)\cos(x+15^0)}{\sin(x+15^0)\cos(x-15^0)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin(30^0)+\sin 2x}{\sin 30^0 + \sin 2x} = \frac{1}{3}$$

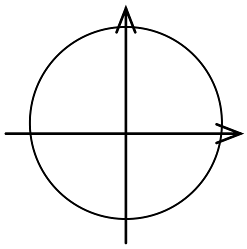
$$\frac{\sin 2x - \frac{1}{2}}{\sin 2x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin 2x - 3 - 2\sin 2x - 1}{6\sin 2x + 3} = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$2x = 90^0 + 360^0 m, m \in Z$

$x = 45^0 + 180^0 m, m \in Z$

Ответ: $x = 45^0 + 180^0 m, m \in Z$

6) Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}, x \in R$$

$$\left(\frac{1 - coc\ 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos^2 2x + \cos^2 2x = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$2 + 2\cos^2 2x = 4\sin 2x - 2$

$\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$

Пусть $\sin 2x = y$, тогда

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_1 = 1$

$y_2 = -3$

$\sin 2x = 1$ или $\sin 2x = -3$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Т.к. $|\sin 2x| \leq 1$

при $x \in R$, то корней нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

7) Решение тригонометрических уравнений как однородное.

Однородное уравнение – это уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и туже степень.

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + ... + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$, где $a_0; a_1; a_2; ...; a_n$ - действительные числа. n - показатель однородности.

$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$

$3\sin 2\frac{x}{2} + 4\cos 2\frac{x}{2} = 5*1$

$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 5\sin^2\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2}$

$9\sin^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$

Если $\cos\frac{x}{2} = 0$, то и $\sin\frac{x}{2} = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству, значит $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Разделим обе части на $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$, получим

$9tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} + 1 = 0$

$\left(3tg\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$

$tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$

$\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$

$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

8) Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента.

$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$

Т. к. $3^2 + 4^2 \geq 5^2$, то корни есть.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, получим

$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$

Т. к. $\left|\frac{3}{5}\right| \leq 1, \left|\frac{4}{5}\right| \leq 1$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, а $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, тогда получим

$\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = 1$

$\sin(x + \varphi) = 1$

$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Теория.

$a\cos x + b\sin x = c$

1) если $c = 0$, то уравнение однородное.

2) если $c \neq 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ (то есть хотя бы одно из чисел a или b не равно 0), то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Т. к. $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1; \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, тогда

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

а) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ т. е. $a^2 + b^2 < c^2$, то корней нет.

в) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ т. е. $a^2 + b^2 \geq c^2$, тогда

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z$$

$$x = -\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z$$

$3\sin x + 4\cos x = 6, x \in Z$

Т. к. $3^2 + 4^2 < 6^2$, то корней нет.

9) Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$$

$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$ (1)

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5 \qquad (2)$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2} + 4 - 4tg^2\frac{x}{2} - 5 - 5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1 + tg^2\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения $\cos\frac{x}{2}=0$ корнями данного уравнения.

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$$

Проверка.

Если $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$, тогда

$$3\sin(x+2\pi n)+4\cos(x+2\pi n)=5,\ x\in Z$$

$0+4(1)=5$ - не верно, значит $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$, не является корнями исходного уравнения.

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

10) Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного.

Уравнение вида $P(\sin x\pm\cos x;\sin x\cos x)=0$ решается следующей заменой $\sin x\pm\cos x=y$, $(\sin x\pm\cos x)^2=y^2$, $1\pm2\sin x\cos x=y^2$, $\pm2\sin x\cos x=y^2-1$

$$2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0,\ x\in R$$

Способ I

$$2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1=0$$

Пусть $\sin x+\cos x=y$, $(\sin x+\cos x)^2=y^2$, $1+2\sin x\cos x=y^2$, $2\sin x\cos x=y^2-1$, получим

$$y^2+2y-1+1=0$$

$$y^2+2y=0$$

$$y(y+2)=0$$

$y=0$ или $y=-2$

$\sin x+\cos x=0$

Разделим на $\cos x\neq0$, получим

$$tgx=-1$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$$

$\sin x+\cos x=-2$ (3)

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Т. к. $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq1$, при $x\in R$, то корней нет.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

Теория.

$|\sin x\pm\cos x|\leq\sqrt{2}$, при $x\in R$

Доказательство:

$$\left|\sin x \pm \cos x\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$$

Шесть способов решения уравнения (3).

1. применение формулы $\sin x + \cos x$.
2. через $tg\,\frac{x}{2}$.
3. привести к однородному уравнению второй степени.
4. способ введения вспомогательного аргумента.
5. с помощью неравенства $\left|\sin x \pm \cos x\right| \le \sqrt{2}$, при $x \in R$.
6. метод оценки левой и правой частей уравнения.

$$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0,\ x \in R$$

Способ II

$$2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x) = 0$$

$\sin x + \cos x = 0$ или $\sin x + \cos x = -2$

Разделим на $\cos x \ne 0$, получим

$tgx = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

Т. к. $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$, при $x \in R$, то корней нет.

11) Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок).

12) Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала.

Пример №1

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$$

$$\begin{cases} \sin x \ge 0 & (1) \\ 1 - \cos x = \sin^2 x & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение 2.

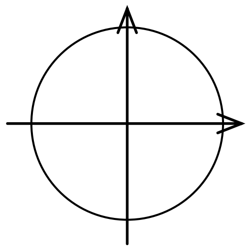
$1 - \cos x = \sin^2 x$

$\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ или $\cos x = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ $\quad x_2 = 2\pi n,\ n \in Z$



Отметим поученные решения и условие 1 на тригонометрическом круге.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, $x_2 = 2\pi n,\ n \in Z$

Пример №2

$\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2}\cos x = 0$

$\sqrt{\sin x} = -\sqrt[4]{2}\cos x$

$\begin{cases} \cos x \le 0 & (1) \\ \sin x = \sqrt{2}\cos^2 x & (2) \end{cases}$

Решим уравнение 2.

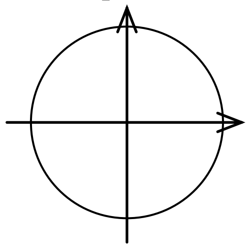
$\sin x = \sqrt{2}(1 - \sin^2 x)$

$\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

Решим квадратное уравнение относительно $\sin x$.

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin x = -\sqrt{2}, < -1$, то корней нет.

Отметим поученные решения и условие 1 на тригонометрическом круге.



Ответ: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$