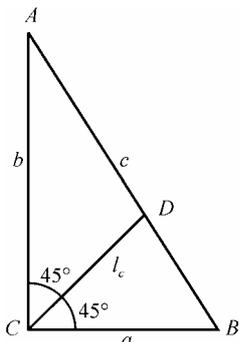


ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. По заданным катетам a и b определить биссектрису прямого угла.



Решение.

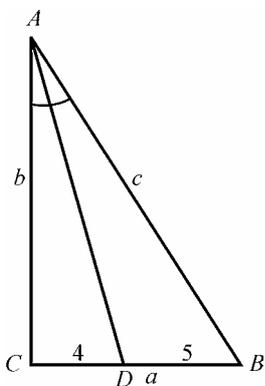
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD};$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}al_c \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bl_c \sin 45^\circ;$$

$$ab = l_c \sin 45^\circ (a + b);$$

$$l_c = \frac{ab}{(a + b)\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}ab}{a + b}.$$

2. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.



Решение.

$$\frac{b}{c} = \frac{4}{5} \text{ (на основании свойства биссектрисы внутреннего}$$

угла треугольника).

$$\text{Но } c^2 - b^2 = 81;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 - b^2 = 81, \\ \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \end{array} \right. \Rightarrow b = 12,$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ см}^2.$$

3. Найти площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов.

Решение.

Известно, что в прямоугольном треугольнике

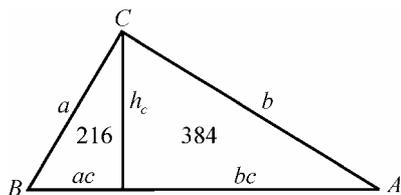
$$a + b = 2R + 2r, S = \frac{1}{2}ab.$$

Возведем в квадрат:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (2R + 2r)^2, c^2 + 4S = 4(R + r)^2,$$

$$\text{но } c = 2R, 4R^2 + 4S = 4(R + r)^2, S = 2Rr + r^2.$$

4. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит треугольник на два треугольника с площадями 384 и 216 см². Найти гипотенузу.



Решение.

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c,$$

$$c = \frac{ab}{h_c} = \frac{2 \cdot 600}{h_c} = \frac{1200}{h_c},$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} a_c h_c = 216, \\ \times \frac{1}{2} b_c h_c = 384, \\ \hline \frac{1}{4} a_c b_c h_c^2 = 216 \cdot 384. \end{array}$$

Но $h_c = \sqrt{a_c b_c}$, $h_c^2 = a_c b_c$, $\frac{1}{4} h_c^4 = 216 \cdot 384$,

$$h_c^4 = 4 \cdot 6 \cdot 66 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4, \quad h_c = 4 \cdot 6 = 24, \quad c = \frac{1200}{24} = 50 \text{ см.}$$

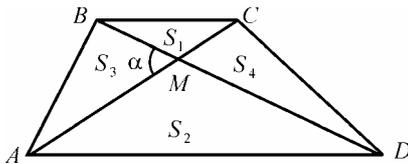
5. В треугольнике известны длины двух сторон — 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

Решение.

$$a=6\text{см}, b=3\text{см}, \frac{h_a + h_b}{2} = h_c, \quad h_a + h_b = 2h_c,$$

$$\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} = 2 \frac{2S}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{c}, \quad c = 4.$$

6. Трапеция разделена диагоналями на четыре части. Определить ее площадь, если известны площади ее частей, прилежащих к основаниям S_1 и S_2 .



Решение.

1. $S_3 = S_4$ (доказать самостоятельно).

2. $S_1 = \frac{1}{2} BM \cdot MC \cdot \sin \alpha,$

$$S_2 = \frac{1}{2} AM \cdot MD \cdot \sin \alpha, \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$S_1 S_2 = \frac{1}{4} AM \cdot BM \cdot MC \cdot MD \cdot \sin^2 \alpha.$$

3. $S_3 = \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin \alpha, \quad S_4 = \frac{1}{2} CM \cdot MD \cdot \sin \alpha,$

$$S_3 S_4 = \frac{1}{4} AM \cdot BM \cdot MC \cdot MD \cdot \sin^2 \alpha \Rightarrow S_1 S_2 = S_3 S_4,$$

$$S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 S_2}, \quad S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

7. Стороны треугольника 13, 14, 15 см. Определить площадь и радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей.

Решение.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21,$$

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ см}^2,$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{65}{8} \text{ см} \quad r = \frac{S}{p} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{21} = 4 \text{ см}$$

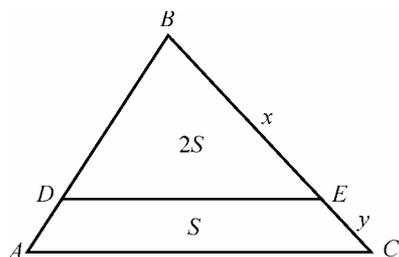
8. По трем высотам треугольника h_a, h_b, h_c вычислить его площадь.

Решение.

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\
 &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c}\right) \left(\frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_a}\right) \left(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_b}\right) \left(\frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_b} - \frac{S}{h_c}\right)} = \\
 &= S^2 \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}, \\
 \frac{1}{S} &= \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}, \\
 S &= \left(\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \right)^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

9. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его части, площади которых относятся как 2:1, считая от вершины. В каком отношении она делит боковые стороны?

Решение.



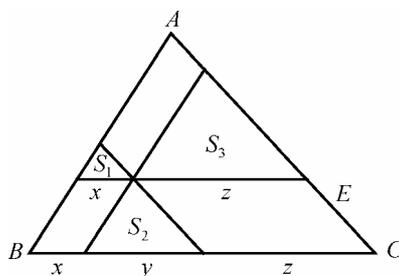
Из подобия треугольников ABC и BDE имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{3S}{2S} &= k^2 = \left(\frac{x+y}{x}\right)^2, \quad \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\
 \frac{y}{x} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + 2.
 \end{aligned}$$

10. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разделяют площадь треугольника на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями, равными S_1, S_2, S_3 . Найти площадь данного треугольника.

Решение.

Обозначим площадь $\triangle ABC$ через S . Из подобия следует:

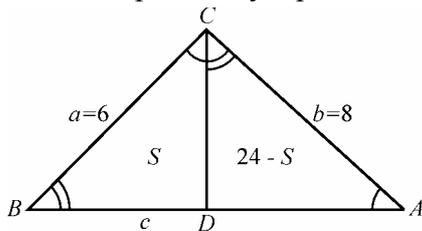


$$\begin{cases} \frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^2, & \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{x+y+z}, \\ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^2, & \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{y}{x+y+z}, \\ \frac{S_3}{S} = \left(\frac{z}{x+y+z}\right)^2, & \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{z}{x+y+z}, \end{cases}$$

Сложив левые и правые части, получим:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$

11. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 см проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.



Решение.

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = 24,$$

$$\Delta BCD \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{S}{24-S} = k^2 = \left(\frac{6}{8}\right)^2, \frac{S}{24-S} = \frac{9}{16}, 25S = 24 \cdot 9,$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{24 \cdot 9}{25} = \frac{216}{25}, S_{\Delta ACD} = 24 - \frac{216}{25} = \frac{384}{25}.$$

12. Дан параллелограмм, в котором острый угол 60° . Определить отношение длин сторон, если отношение квадратов длин диагоналей равно $19/7$.

Решение.

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab,$$

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{19}{7}, \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^2 + b^2 + ab} = \frac{19}{7}.$$

Разделим числитель и знаменатель на b^2 :

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + 1} = \frac{19}{7}, \frac{a}{b} = t, \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1} = \frac{19}{7},$$

$$6t^2 - 13t + 9 = 0, t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}, \frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$

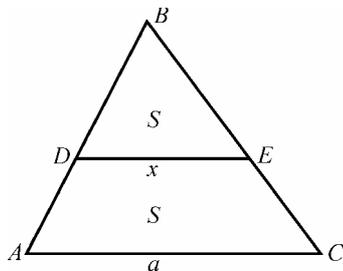
13. Основание треугольника равно a . Определить длину прямой, параллельной основанию и делящей площадь треугольника пополам.

Решение.

ΔABC и ΔDBE подобны.

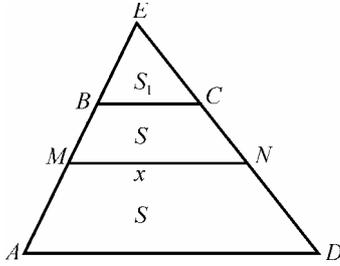
$$\frac{2S}{S} = k^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^2,$$

$$\frac{a^2}{x^2} = 2, x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



14. Длины оснований трапеции a и b . Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее на две равновеликие фигуры.

Решение.



$\triangle MNE$ и $\triangle BEC$ — подобны.

$$\frac{S + S_1}{S_1} = \frac{x^2}{a^2}.$$

$\triangle AED$ и $\triangle BEC$ — подобны.

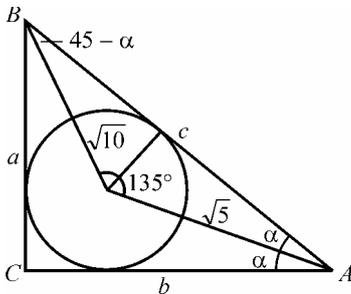
$$\frac{2S + S_1}{S_1} = \frac{b^2}{a^2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{S_1} + 1 = \frac{x^2}{a^2}, \\ \frac{2S}{S_1} + 1 = \frac{b^2}{a^2}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2S}{S_1} = \frac{2x^2}{a^2} - 2, \\ \frac{2S}{S_1} = \frac{b^2}{a^2} - 1, \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{a^2} - 2 = \frac{b^2}{a^2} - 1, \quad 2x^2 = a^2 + b^2, \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

15. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты.

Решение.



$$c^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cos 135^\circ = 25, \quad c = 5.$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{10}}{\sin \alpha} \quad (\text{на основании теоремы синусов}),$$

$$\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha,$$

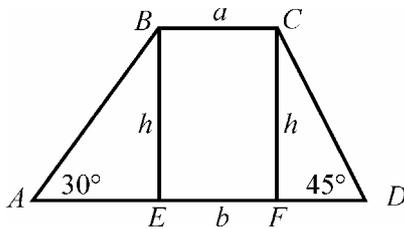
$$2 \sin \alpha = \cos \alpha, \quad \operatorname{ctg} \alpha = 2,$$

$$a = c \sin 2\alpha = c \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 5 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 + 4} = 4,$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2, \quad b = 3.$$

16. Основания трапеции a и b , углы при большем основании $\pi/6$ и $\pi/4$. Найти площадь трапеции.

Решение.



$$S = \frac{a + b}{2} h,$$

$$AE = h \operatorname{ctg} 30^\circ = h\sqrt{3},$$

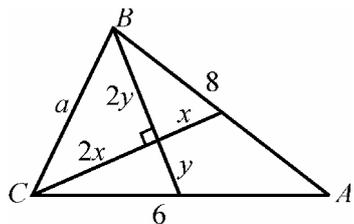
$$FD = h \operatorname{ctg} 45^\circ,$$

$$h\sqrt{3} + h + a = b, \quad h(\sqrt{3} + 1) = b - a,$$

$$h = \frac{b - a}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(b - a)(\sqrt{3} - 1)}{2},$$

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot \frac{(b - a)(\sqrt{3} - 1)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

17. Две стороны треугольника 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону.

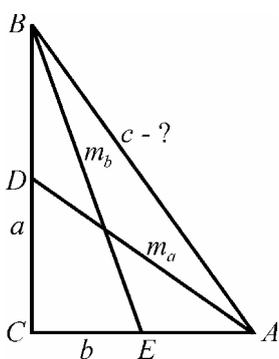


Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16 \\ + \quad 4x^2 + y^2 &= 9 \\ \hline 5(x^2 + y^2) &= 25, \\ x^2 + y^2 &= 5, \end{aligned}$$

$$a^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4(x^2 + y^2) = 4 \cdot 5, \quad a = 2\sqrt{5}.$$

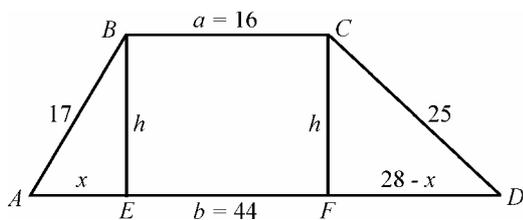
18. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу.



Решение.

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + b^2 &= 52 \quad (\text{ии } \triangle ACD) \\ + \quad a^2 + \frac{b^2}{4} &= 73 \quad (\text{ии } \triangle BCE) \\ \hline \frac{5a^2}{4} + \frac{5b^2}{4} &= 125, \\ \frac{5}{4}(a^2 + b^2) &= 125, \quad \frac{5}{4}c^2 = 125, \quad c = 10. \end{aligned}$$

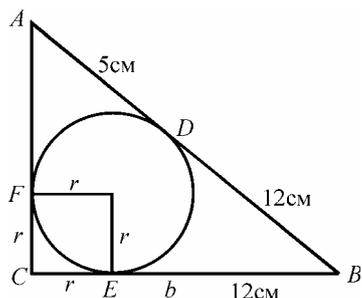
19. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 и 44 см, а непараллельные – 17 и 25 см.



Решение.

$$\begin{aligned} h^2 &= 17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2, \\ 17^2 - x^2 &= 25^2 - (28 - x)^2, \quad x = 8, \\ h^2 &= 17^2 - 8^2 = 25 \cdot 9, \quad h = 15, \\ S_{ABCD} &= \frac{a+b}{2} h = \frac{16+44}{2} \cdot 15 = 450 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

20. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты и радиус окружности.

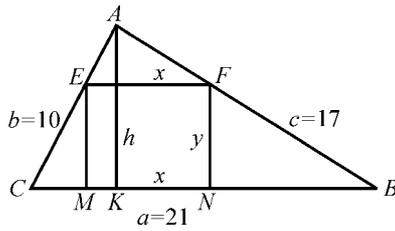


Решение.

$$\left. \begin{aligned} AD = AF = 5 \\ BD = BE = 12 \\ FC = CE = r \end{aligned} \right\} \text{(на основании свойства двух касательных),}$$

$$\begin{aligned} (5+r)^2 + (12+r)^2 &= 17^2, \\ r &= 3, \\ a &= 15, \\ b &= 8. \end{aligned}$$

21. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.



Решение.

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{21} = 8.$$

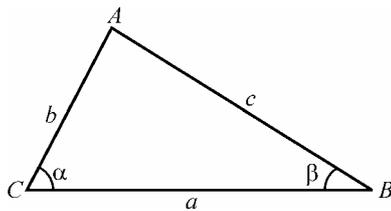
Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$ следует:

$$\frac{21}{x} = \frac{h}{h-y}, \quad \frac{21}{a} = \frac{8}{8-y}, \quad \text{но } y = 12 - a, \quad \frac{21}{x} = \frac{8}{x-4},$$

$$x = \frac{84}{13}, \quad y = 12 - \frac{84}{13} = \frac{72}{13}.$$

22. Сторона треугольника равна a , а прилежащие к ней углы соответственно равны α и β . Определить:

- стороны a и b ;
- радиус описанной окружности;
- площадь треугольника.



Решение.

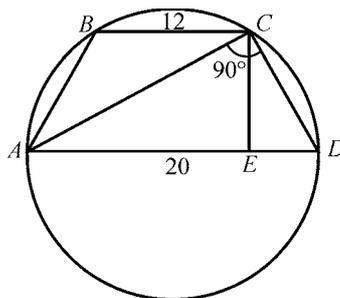
$$\frac{a}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$b = a \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad c = a \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$R = \frac{a}{2 \sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{a}{2 \sin(\alpha + \beta)},$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} a \cdot a \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

23. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.



Решение.

$\angle ACD = 90^\circ$ (опирается на диаметр),

$$DE = \frac{20 - 12}{2} = 4, \quad AE = 16,$$

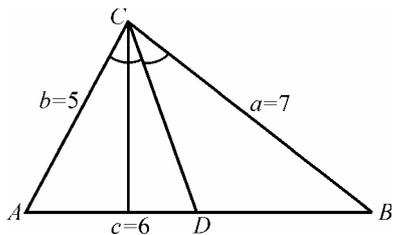
$$AC = \sqrt{AD \cdot AE} = \sqrt{20 \cdot 16} = 8\sqrt{5},$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DE} = \sqrt{20 \cdot 4} = 4\sqrt{5},$$

(см. прямоугольный треугольник: $a = \sqrt{ca_c}$, $b = \sqrt{cb_c}$).

24. В треугольнике ABC , в котором $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 5$ см, биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Определить площадь треугольника ADC .

Решение.



$$\frac{AD}{BD} = \frac{5}{7} \text{ (на основании свойства биссектрисы}$$

внутреннего угла треугольника),

$$\frac{AD}{6-AD} = \frac{5}{7}, \quad AD = \frac{5}{2},$$

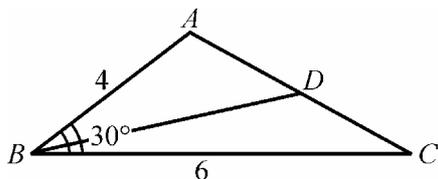
$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot h_c, \quad h_c = \frac{2S}{c},$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} = 6\sqrt{6},$$

$$h_c = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}, \quad S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

25. Дан треугольник ABC , в котором угол B равен 30° , $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D . Определить площадь $\triangle ABD$.

Решение.



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC},$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot BD \cdot \sin 15^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot BD \cdot \sin 15^\circ,$$

$$BD = \frac{6}{5 \sin 15^\circ},$$

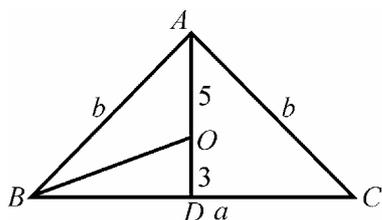
$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{6}{5 \sin 15^\circ} \cdot \sin 15^\circ = 2,4.$$

26. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника на отрезки, равные 5 и 3 см, считая от вершины. Найти стороны треугольника.

Решение.

Центр вписанной окружности находится на пересечении биссектрис.

Из $\triangle ABD$ имеем $\frac{a/2}{b} = \frac{3}{5}$ (на основании свойства



биссектрисы внутреннего угла треугольника).

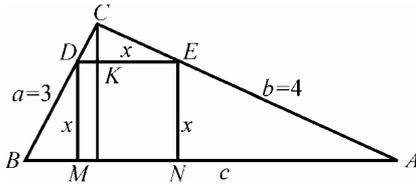
$$a = \frac{6}{5}b. \text{ По теореме Пифагора из } \triangle ABD \text{ имеем } b^2 - \frac{a^2}{4} = 64.$$

Решая систему

$$\begin{cases} a = \frac{6}{5}b. \\ b^2 - \frac{a^2}{4} = 64, \end{cases} \quad a = 12 \text{ см}, b = 10 \text{ см}.$$

27. Найти сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами, равными 3 и 4 см. Одна сторона квадрата лежит на гипотенузе.

Решение.



Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ имеем:

$$\frac{c}{x} = \frac{h_c}{CK}, \quad c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c, \quad h_c = \frac{ab}{c} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}, \quad CK = h_c - x,$$

$$\frac{5}{x} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{12}{5} - x}, \quad \frac{5}{x} = \frac{12}{12 - 5x}, \quad 12x = 60 - 25x,$$

$$37x = 60, \quad x = \frac{60}{37}.$$

Ответ: сторона квадрата равна $60/37$ см.

28. Около круга описана равнобокая трапеция, площадь которой равна S и острый угол α . Найти длину средней линии.

Решение.

$$S = \frac{a+b}{2}h, \quad h = c \sin \alpha.$$

Но $a+b = 2c$, $c = \frac{a+b}{2}$ (свойство описанного четырехугольника).

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot c \sin \alpha = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \sin \alpha = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin \alpha,$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{S}{\sin \alpha}, \quad \frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}.$$

29. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

Решение.

$$CM = 15 - 13 = 2,$$

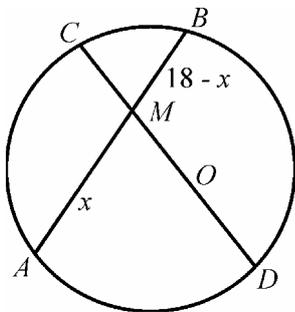
$$MD = 15 + 13 = 28,$$

$$CM \cdot MD = AM \cdot BM$$

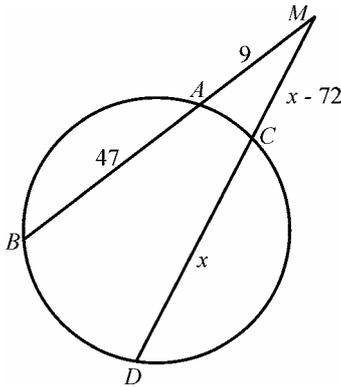
(свойство отрезков пересекающихся хорд),

$$2 \cdot 28 = x(18 - x),$$

$$x = 4, \quad x = 14.$$



30. Из точки вне круга проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47 м, а внешний 9 м; внутренний второй секущей на 72 м больше внешнего ее отрезка. Определить длину второй секущей.



Решение.

$$BM \cdot AM = MD \cdot MC,$$

$$56 \cdot 9 = (2x - 72)(x - 72),$$

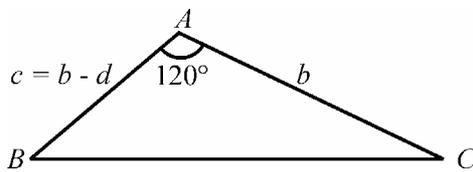
$$x^2 - 108x + 2340 = 0,$$

$$x = 30,$$

$$x = 78.$$

Ответ: длина секущей равна 84 м.

31. Во сколько раз наибольшая сторона треугольника больше средней, если один из его углов равен 120° и известно, что стороны образуют арифметическую прогрессию.



Решение.

Пусть $AC = b$, $AB = b - d$, $BC = b + d$,

и d — разность прогрессии.

$$(b + d)^2 = (b - d)^2 + b^2 - 2(b - d)b \cos 120^\circ \text{ (по т. косинусов)} =$$

$$= (b - d)^2 + b^2 + (b - d)b.$$

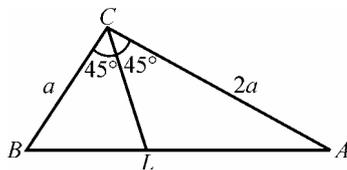
Найдем $\frac{b + d}{b} = 1 + \frac{d}{b}$, $(b + d)^2 = (b - d)^2 + b^2 + (b - d)b$.

Поделим обе части уравнения на b^2 . Получим:

$$\left(1 + \frac{d}{b}\right)^2 = \left(1 - \frac{d}{b}\right)^2 + 1 + 1 - \frac{d}{b}, \quad \frac{d}{b} = y,$$

$$(1 + y)^2 = (1 - y)^2 + 2 - y, \quad y = \frac{2}{5}, \quad \frac{b + d}{b} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}.$$

32. В прямоугольном треугольнике один катет в два раза длиннее другого, а гипотенуза равна $3\sqrt{10}$. Найти длину биссектрисы прямого угла.



Решение.

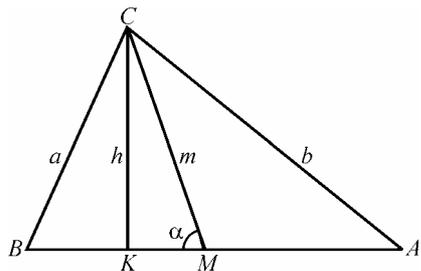
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCI} + S_{\triangle ACI},$$

$$\frac{1}{2} a \cdot 2a = \frac{1}{2} ax \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2ax \sin 45^\circ,$$

$$x = \frac{2a}{3 \sin 45^\circ},$$

$$a^2 + 4a^2 = (3\sqrt{10})^2, \quad 5a^2 = 90, \quad a = 3\sqrt{2}, \quad x = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \text{ см}$$

33. В треугольнике ABC к стороне AB проведены высота CK и медиана CM . Найти косинус угла KCM , если $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $AM = MC$.



Решение.

$\triangle ABC$ — прямоугольный, $AM = BM = CM$ (как радиусы описанной окружности).

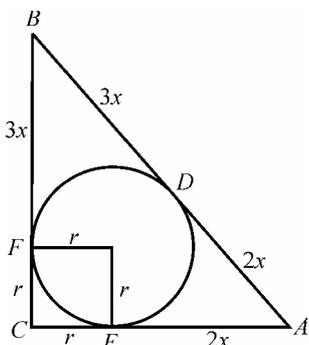
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch, \quad h = \frac{ab}{c} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad CM = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{m} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

34. В прямоугольный треугольник, периметр которого 36 см, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найти длину гипотенузы.

Решение.



Пусть $BD = 3x$, $AD = 2x$, $BD = BF = 3x$, $AD = AE$, $FC = CE$ (на основании свойства касательных).

$$5x + 3x + r + 2x + r = 36,$$

$$r = \frac{36 - 10x}{2},$$

$$a = 3x + \frac{36 - 10x}{2} = 18 - 2x,$$

$$b = 2x + r = 2x + \frac{36 - 10x}{2} = 18 - 3x,$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (18 - 2x)^2 + (18 - 3x)^2 = 25x^2, \quad x = 3, \quad c = 5x = 15.$$

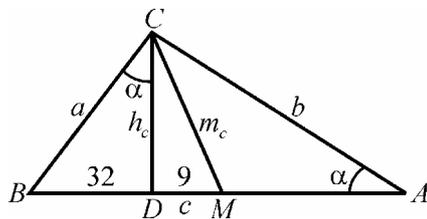
35. В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся как 40:41.

Решение.

$$c = 2m_c = 2 \cdot 41 = 82 \text{ (части)},$$

$$DM = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9,$$

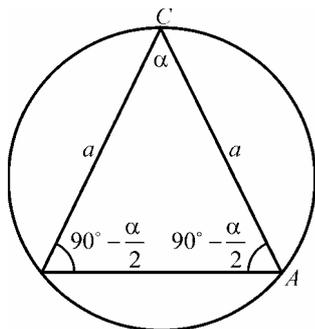
$$BD = 41 - 9 = 32, \quad \frac{a}{b} = ?$$



$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_c}{h_c} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$.

36. Найти площадь равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса R , если угол при вершине равен α .



Решение.

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha,$$

$$a = 2R \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

37. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанной окружности равен 8,5 см, а вписанной — 3 см.

Решение.

$$c = 2R = 17,$$

$$a + b = 2R + 2r = 21,$$

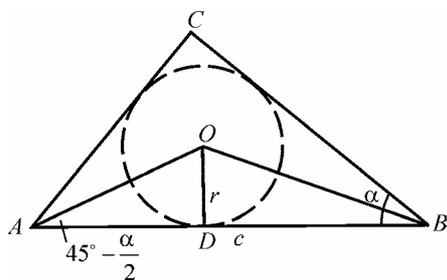
$$a^2 + b^2 + 2ab = 441,$$

$$c^2 + 4S = 441,$$

$$289 + 4S = 441,$$

$$S = 38 \text{ см}^2.$$

38. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , а один из острых углов α . Определить радиус вписанного круга.



Решение.

Центр находится на пересечении биссектрис.

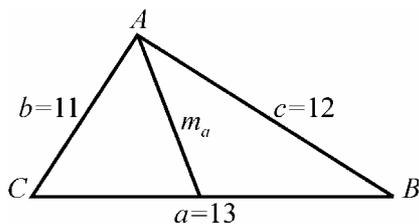
$$AD = r \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$+ BD = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$c = r \left(\operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$r = \frac{c}{\operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

39. Стороны $\triangle ABC$ — 11, 13, 12 см. Вычислить длину медианы, проведенной к большей стороне.



Решение.

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 12^2 - 13^2}{4} = \frac{361}{4},$$

$$m_a = \frac{19}{2} = 9,5 \text{ см}$$

40. Определить угол прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного как 5:2.

Решение.

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{5}, \frac{a+b-c}{2R} = \frac{2}{5}, \frac{a+b-c}{c} = \frac{2}{5}, \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5},$$

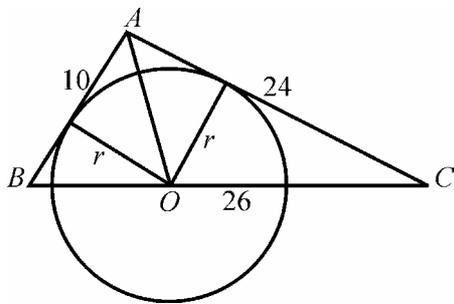
$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}, \sin \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{7}{5}, \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{7}{5} - \sin \alpha,$$

$$1 - \sin^2 \alpha = \left(\frac{7}{5} - \sin \alpha\right)^2, \sin \alpha = y.$$

$$25y^2 - 35y + 12 = 0, y_1 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{4}{5},$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha = \arcsin \frac{3}{5} \text{ или } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha = \arcsin \frac{4}{5}.$$

41. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26 см. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.



Решение.

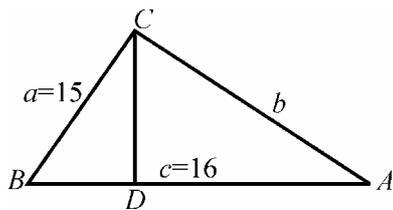
$\triangle ABC$ — прямоугольный, так как $10^2 + 24^2 = 26^2$.

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOC},$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = \frac{1}{2} \cdot 10r + \frac{1}{2} \cdot 24r,$$

$$r = \frac{240}{17}.$$

42. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.



Решение.

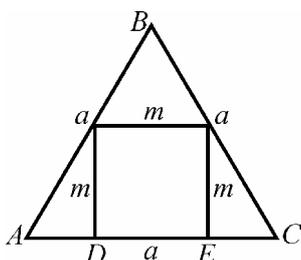
$$a = \sqrt{ca_c} = \sqrt{c(c-16)},$$

$$15^2 = c(c-16), c = 25,$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20,$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{15+20-25}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

43. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого m . Найти сторону треугольника.



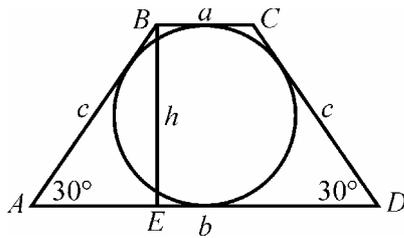
Решение.

$$AD = EC = m \operatorname{ctg} 60^\circ,$$

$$a = m + 2m \operatorname{ctg} 60^\circ = m \left(1 + 2 \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} m.$$

44. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2 . Определить стороны трапеции, если угол при основании равен 30° .

Решение.



$S = \frac{a+b}{2}h$, но $a+b=2c$ (свойство описанного четырехугольника).

$$S = ch, h = c \sin 30^\circ = \frac{c}{2},$$

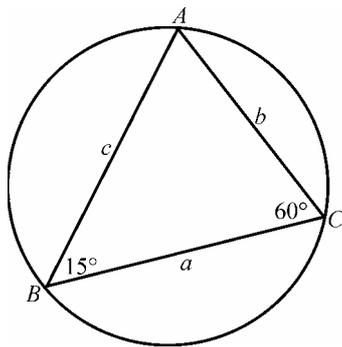
$$8 = \frac{c^2}{2}, c = 4, a+b = 8,$$

$$AE = \frac{b-a}{2} = c \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$b-a = 4\sqrt{3}, \begin{cases} a+b=8 \\ b-a=4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow a = 4 - 2\sqrt{3}, b = 4 + 2\sqrt{3}.$$

45. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60° . Найти площадь треугольника.

Решение.



$$S = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ,$$

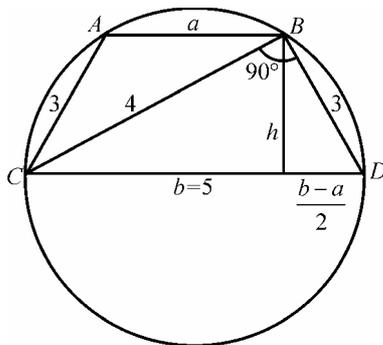
$$a = 2R \sin(180^\circ - (15^\circ + 60^\circ)) = 2R \sin 75^\circ = 2R \cos 15^\circ,$$

$$b = 2R \sin 15^\circ,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cos 15^\circ \cdot 2R \sin 15^\circ \sin 60^\circ = R^2 \sin 30^\circ \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} R^2.$$

46. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности. Найти длину этой хорды, если $AC = 3$, $BC = 4$.



Решение.

$\triangle CBD$ — прямоугольный.

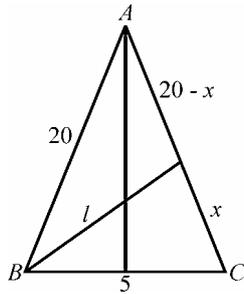
$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}BC \cdot BD, h = \frac{12}{5},$$

$$\frac{b-a}{2} = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \frac{9}{5}, b-a = \frac{18}{5},$$

$$5-a = \frac{18}{5}, a = \frac{7}{5}.$$

47. В равнобедренном треугольнике основание равно 5 см, а боковая сторона — 20 см. Найти длину биссектрисы угла при основании треугольника.

Решение.



$$\frac{x}{20-x} = \frac{5}{20} \quad (\text{на основании свойства биссектрисы}$$

внутреннего угла треугольника),

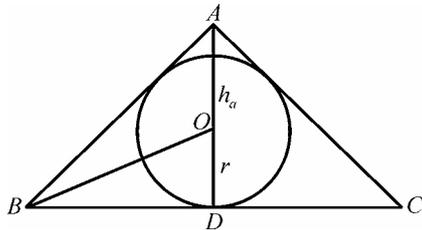
$$x = 4, \quad \cos c = \frac{2,5}{20} = \frac{1}{8}.$$

По теореме косинусов имеем

$$l^2 = x^2 + 5^2 - 2x \cdot \cos c = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8} = 36, \quad l = 36 \text{ (см)}.$$

48. Найти площадь равнобедренного треугольника с углом 120° , если радиус вписанного круга равен $\sqrt[4]{12}$.

Решение.



$$S = \frac{1}{2} a h_a,$$

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{ctg} 15^\circ, \quad a = 2r \operatorname{ctg} 15^\circ,$$

$$h_a = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 30^\circ = r \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ,$$

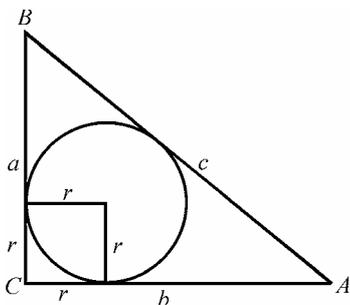
$$S = r \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot r \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = r^2 \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg}^2 15^\circ,$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 + \sqrt{3},$$

$$S = \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (2 + \sqrt{3})^2 = 2(7 + 4\sqrt{3}).$$

49. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см. Найти площадь треугольника.

Решение.



$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad \frac{15+b-c}{2} = 3,$$

$$b - c = -9,$$

$$\begin{cases} c^2 - b^2 = 225, \\ c - b = 9, \end{cases} \Rightarrow c = 17, \quad b = 8,$$

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60 \text{ см}^2$$

50. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60° . Найти площадь треугольника.

Решение.

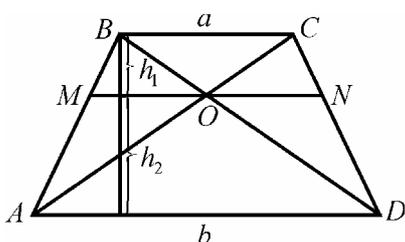
$$S = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ,$$

$$a = 2R \sin(180^\circ - (15^\circ + 60^\circ)) = 2R \sin 75^\circ = 2R \cos 15^\circ,$$

$$b = 2R \sin 15^\circ,$$

$$S = \frac{1}{2} 2R \cos 15^\circ \cdot 2R \sin 15^\circ \sin 60^\circ = R^2 \sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \text{ см}^2$$

51. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N . Найти MN , если основания равны a и b .



Решение.

1. Докажем, что $MO = ON$.

Из подобия $\triangle MBO$ и $\triangle ABD$ имеем

$$\frac{MO}{b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}. \quad (1)$$

2. Из подобия $\triangle CON$ и $\triangle CAD$ имеем

$$\frac{NO}{b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}. \quad (2)$$

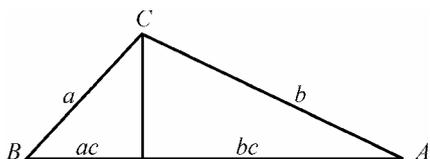
3. Из подобия $\triangle AMO$ и $\triangle ABC$ имеем

$$\frac{MO}{a} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}. \quad (3)$$

Если сложить (1) и (3), то имеем

$$\frac{MO}{b} + \frac{MO}{a} = 1, \quad MO = \frac{ab}{a+b}, \quad MN = \frac{2ab}{a+b}.$$

52. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника проведен перпендикуляр, который делит гипотенузу на отрезки длиной 25,6 и 14,4 см. Найти радиус вписанного круга.



Решение.

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

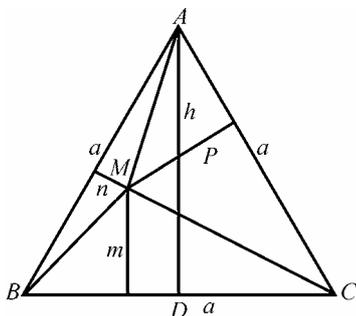
$$c = 25,6 + 14,4 = 40,$$

$$a = \sqrt{ca_c} = \sqrt{40 \cdot 14,4} = 2 \cdot 12 = 24,$$

$$b = \sqrt{cb_c} = \sqrt{40 \cdot 25,6} = 2 \cdot 16 = 32,$$

$$r = \frac{24 + 32 - 40}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

53. Внутри равностороннего треугольника взята точка M , отстоящая от его сторон на расстояниях m , n , p . Найти высоту треугольника.



Решение.

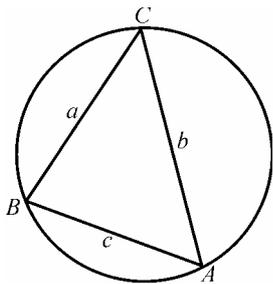
Соединим точку M с точками A , B , C .

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMC},$$

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}ap.$$

Отсюда $h = m + n + p$.

54. Через одну и ту же точку окружности проведены две хорды, равные a и b . Если соединить их концы, то получится треугольник площади S . Определить радиус окружности.



Решение.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, \quad \sin C = \frac{2S}{ab},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

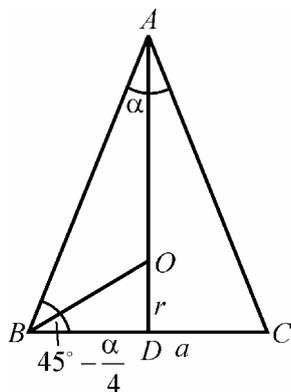
$$\cos C = \pm \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{4S^2}{a^2b^2}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}}{ab},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}}{ab} = a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2},$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}},$$

$$R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{ab \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}}}{4S}.$$

55. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α . Определить отношение радиусов вписанного и описанного кругов.



Решение.

Пусть $BC = a$,

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \text{ из } \triangle BOD,$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} \text{ (по теореме синусов),}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}{\frac{a}{2 \sin \alpha}} = \sin \alpha \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right).$$

56. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где x_1 и x_2 — катеты.

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

$$c^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

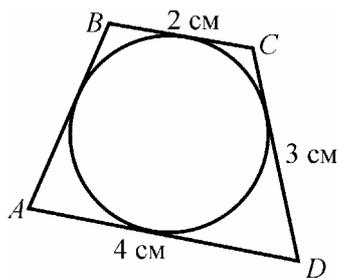
$$c = \frac{\sqrt{b^2 - 2ac}}{a},$$

$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 2ac}}{2a},$$

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{b^2 - 2ac}{4a^2}.$$

Ответ: $\pi \cdot \frac{b^2 - 2ac}{4a^2}.$

57. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны 2, 3 и 4 см, вписана окружность радиуса 1,2 см. Найти площадь этого четырехугольника.



Решение.

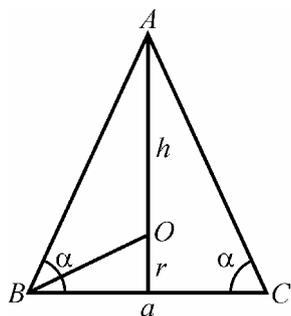
Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанного круга. На основании свойства описанного

$$BC + AD = CD + AB,$$

откуда $AB = 3$ см,

$$S = pr = 6 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ см}^2$$

58. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α . Вычислить основание, если высота больше радиуса вписанного круга на m .



Решение.

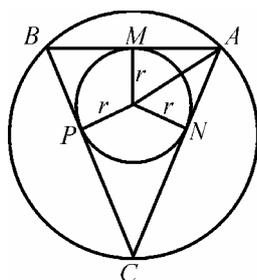
$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad h - r = m,$$

$$\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m, \quad \frac{a}{2} \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = m,$$

$$\frac{a}{2} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}} = m,$$

$$a = 2m \frac{\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2m \cos \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

59. Радиусы описанного и вписанного в треугольник кругов R и r . Определить площадь треугольника, если его углы образуют арифметическую прогрессию.



Решение.

Пусть углы треугольника равны $x - \alpha, x, x + \alpha$,

$$3x = 180^\circ, \quad x = 60^\circ.$$

Пусть $\angle A = 60^\circ$,

$$a = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3},$$

$$b = 2R \sin(60^\circ + \alpha),$$

$$c = 2R \sin(60^\circ - \alpha),$$

$$S = rp = rR(\sin 60^\circ + \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha)) = Rr\sqrt{3} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right),$$

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{8R^3 \sin 60^\circ \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)}{4R} = \sqrt{3}R^2 \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \right),$$

$$Rr \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{3} = R^2 \cdot \sqrt{3} \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \right), \quad \cos \alpha = \frac{R + 2r}{2R},$$

$$S = Rr\sqrt{3} \left(\frac{R + 2r}{2R} + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}(R + r)r.$$

Второй способ решения.

$$\angle A = 60^\circ, \quad BC = \sqrt{3}R,$$

$$\angle OAN = \angle MAO = 30^\circ,$$

$$AN = AM = r\sqrt{3},$$

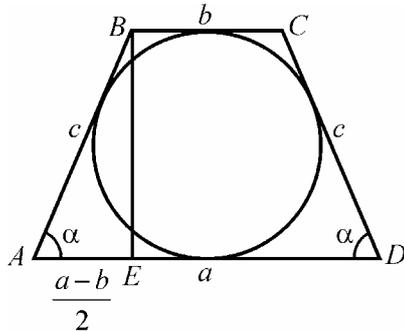
$BM = BP, NC = PC$ на основании свойства касательных;

$$S = rp, \quad 2p = 2(AM + BP + PC),$$

$$p = (R+r)\sqrt{3}, \quad BP + PC = R\sqrt{3}, \quad S = r(R+r) \cdot \sqrt{3}.$$

60. Найти периметр равнобедренной трапеции, описанной около круга, если большее основание равно a , а острый угол равен α .

Решение.



$$a + b = 2c, \quad c = \frac{a-b}{2 \cos \alpha},$$

$$a + b = \frac{a-b}{\cos \alpha},$$

$$b(1 + \cos \alpha) = a(1 - \cos \alpha),$$

$$b = a \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = a \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$P = a + b + 2c = 2(a + b) = 2 \left(a + a \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2a \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2a}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

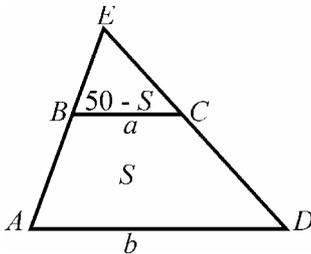
61. Боковые стороны трапеции продолжены до их взаимного пересечения. Найти площадь трапеции, если длины ее оснований относятся как 5:3 и площадь всего образовавшегося треугольника равна 50 см^2 .

Решение.

Из подобия $\triangle AED$ и $\triangle BEC$ следует

$$\frac{50}{50 - S} = \left(\frac{5}{3} \right)^2,$$

$$S = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$



62. Найти площадь сегмента, если его периметр равен P , а дуга содержит 120° .

Решение.

$$a + l = P, \quad a = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3},$$

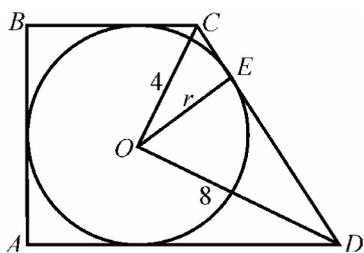
$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot 120^\circ = \frac{2}{3} \pi R,$$

$$\frac{2}{3} \pi R + R\sqrt{3} = P,$$

$$R = \frac{2P}{2\pi + 3\sqrt{3}},$$

$$S_{\text{сег}} = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3P^2 (4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$$

63. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию.



Решение.

$\angle COD = 90^\circ$ (доказать самостоятельно),

$$CD = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{1}{2} r \cdot CD,$$

$$r = \frac{4 \cdot 8}{4\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \quad AB = 2r = \frac{16\sqrt{5}}{5},$$

$AB + CD = BC + AD$ (свойства описанного четырехугольника),

$$BC + AD = \frac{16\sqrt{5}}{5} + 4\sqrt{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{BC + AD}{2} = \frac{18\sqrt{5}}{5}.$$

64. Медианы треугольника равны $\sqrt{50}$, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ см. Доказать, что треугольник — прямоугольный.

Решение.

$$\left. \begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \\ m_b^2 &= \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, \\ m_c^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2b^2 + 2c^2 - a^2 &= 100 \\ + 2a^2 + 2c^2 - b^2 &= 208 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 &= 292 \\ \hline 3(a^2 + b^2 + c^2) &= 600, \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 200, \quad 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 292,$$

$$\underbrace{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}_{400} - 3c^2 = 292, \quad c^2 = 36, \quad c = 6,$$

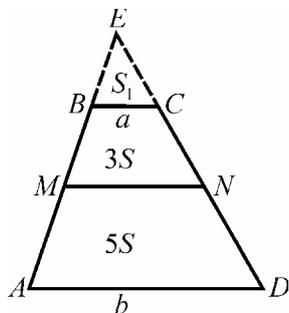
$$2a^2 + 2b^2 - b^2 = 208,$$

$$\underbrace{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}_{400} - 3b^2 = 208, \quad b^2 = 64, \quad b = 8,$$

$$c = 10.$$

Так как $10^2 = 6^2 + 8^2$, то треугольник — прямоугольный.

65. Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти длины оснований.



Решение.

Из подобия $\triangle AED$, $\triangle MEN$ и $\triangle BEC$ имеем:

$$\frac{3S + S_1}{S_1} = \left(\frac{a+b}{2a}\right)^2, \quad \frac{8S + S_1}{S_1} = \frac{b^2}{a^2},$$

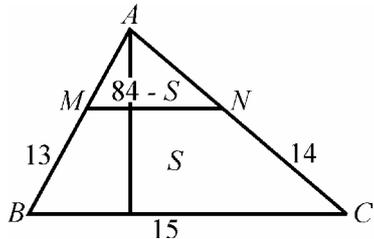
$$\left. \begin{aligned} 3\frac{S}{S_1} + 1 &= \frac{100}{a^2}, \\ 8\frac{S}{S_1} + 1 &= \frac{b^2}{a^2}, \end{aligned} \right\}$$

Исключив $\frac{S}{S_1}$, имеем $\frac{800 - 3b^2}{a^2} = 5$.

Из системы

$$\begin{cases} \frac{800 - 3b^2}{a^2} = 5, \\ \frac{a+b}{2} = 10 \end{cases} \quad \text{найдем, что } a = 5, b = 15.$$

66. Основание треугольника 15 см, а боковые стороны 13 и 14 см. Высота разделена в отношении 2:3 (считая от вершины) и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь получившейся при этом трапеции.



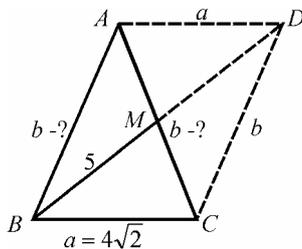
Решение.

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ имеем

$$\frac{84}{84 - S} = \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad S = 70,72 \text{ (см}^2\text{)}.$$

67. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны — 5 см. Найти длины боковых сторон.



Решение.

Дополним до параллелограмма. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон:

$$10^2 + b^2 = 2(b^2 + a^2),$$

$$100 + b^2 = 2(32 + b^2),$$

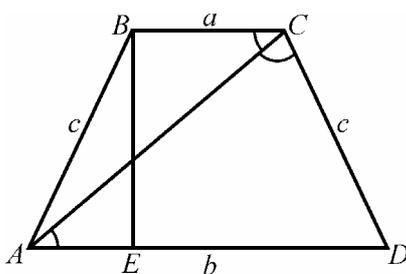
$$b = 6 \text{ (см)}.$$

68. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна h , радиус вписанной окружности равен r . Найти гипотенузу.

Решение.

$$\begin{cases} \frac{ab}{c} = h, & (a+b)^2 - 2ab = c^2, \\ \frac{a+b-c}{2} = r, & a+b = 2R + 2r = c + 2r, \\ a^2 + b^2 = c^2, & (2r+c)^2 - ch = c^2, \end{cases} \quad \text{откуда } c = \frac{4r^2}{h-4r}.$$

69. Диагональ равнобедренной трапеции делит тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.



Решение.

$$a + b + 2c = 42,$$

$$3 + b + 2c = 42,$$

$$b + 2c = 39,$$

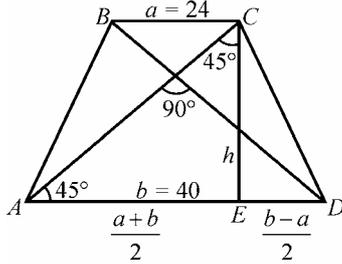
$$\angle ACB = \angle CAD.$$

Следовательно,

$$b = c, \quad 3b = 39, \quad b = 13, \quad c = 13, \quad AE = \frac{b-a}{2} = \frac{13-3}{2} = 5,$$

$$h^2 = 13^2 - 5^2, \quad h = 12, \quad S = \frac{a+b}{2}h = \frac{3+13}{2} \cdot 12 = 96 \text{ см}^2.$$

70. В равнобедренной трапеции одно основание равно 40 см, а другое — 24 см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

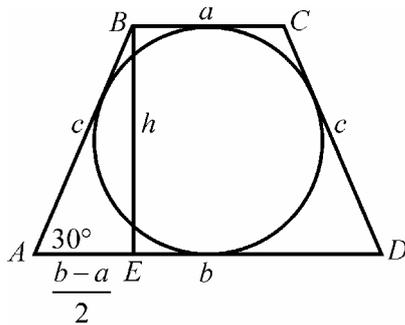


Решение.

$$S = \frac{a+b}{2} h, \quad h = AE = \frac{a+b}{2},$$

$$S = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \left(\frac{24+40}{2} \right)^2 = 32^2 = 1024 \text{ см}^2.$$

71. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см². Определить стороны трапеции, если угол, при основании равен 30°.



Решение.

$$S = \frac{a+b}{2} h, \quad \text{но } a+b = 2c \quad (\text{свойство описанного четырехугольника}).$$

$$S = ch, \quad h = c \sin 30^\circ = \frac{c}{2},$$

$$8 = \frac{c^2}{2}, \quad c = 4.$$

$$\text{Из } \triangle ABE: \frac{b-a}{2} = c \cos 30^\circ, \quad b-a = 4\sqrt{3}, \quad a+b = 8,$$

$$\begin{cases} a+b = 8, \\ b-a = 4\sqrt{3}, \quad b = 2\sqrt{3} + 4, \quad a = 4 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

72. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, его площадь равна 24 см². Найти площадь описанного круга.

Решение.

$$S = \pi R^2, \quad a+b+c = 24, \quad a+b = 24-c,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (24-c)^2, \quad \frac{1}{2}ab = 24, \quad c^2 + 4 \cdot 24 = (24-c)^2,$$

$$c = 10, \quad R = \frac{c}{2} = 5, \quad S = \pi R^2 = 25\pi.$$

73. В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся как 40:41.

Решение.

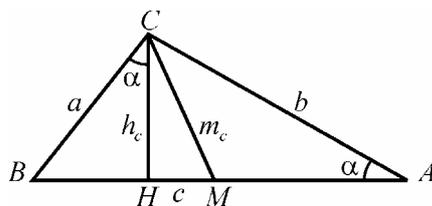
$$h_c = 40 \text{ частей}, \quad m_c = 41, \quad c = 2m_c, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Определим $\operatorname{tg} \alpha$.

$$BM = MC = 41,$$

$$HM = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9 \text{ частей}$$

$$BH = 41 - 9 = 32,$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BH}{h_c} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a}{b} = \frac{4}{5}.$$

74. Найти радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16м.

Решение.

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad c = 9+16 = 25, \quad a = \sqrt{ca_c} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15,$$

$$b = \sqrt{cb_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20, \quad r = \frac{15+20-25}{2} = 5 \text{ (мм)}$$

75. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см². Найти радиус описанной окружности.

Решение.

$$R = \frac{c}{2}. \quad \text{По условию, } a+b+c = 24, \quad a+b = 24-c,$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = (24-c)^2, \quad c^2 + 4S = (24-c)^2,$$

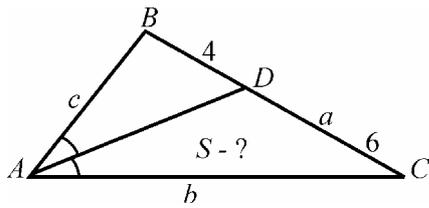
$$c^2 + 4 \cdot 24 = (24-c)^2, \quad c = 10, \quad R = 5 \text{ см}$$

76. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Известно, что $BD = 4$, $DC = 6$. Определить площадь $\triangle ADC$.

Решение.

$$\frac{c}{b} = \frac{4}{6} \quad (\text{на основании свойства биссектрисы внутреннего}$$

угла треугольника). Но $b^2 - a^2 = 100$.

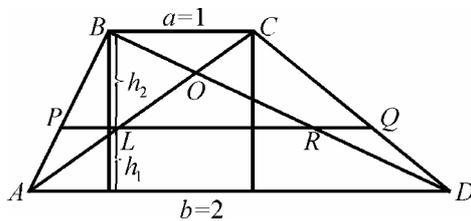


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{b} = \frac{2}{3}, \\ b^2 - a^2 = 100, \end{array} \right.$$

$$c = 4\sqrt{5}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 10 = 20\sqrt{5},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}c \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4 = 8\sqrt{5}, \quad S_{\triangle ADC} = 20\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = 12\sqrt{5}.$$

77. Дана трапеция $ABCD$. Параллельно ее основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны трапеции AB и CD в точках P и Q , а диагонали AC и BD в точках L и R . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Известно, что $BC = 1$, $AD = 2$, а площади $\triangle BOC$ и $\triangle LOR$ равны. Найти длину отрезка PQ .



Решение.

$LR = BC = 1$. Из подобия $\triangle APL$ и $\triangle ABC$ имеем:

$$\frac{PL}{BC} = \frac{h_1}{h_1 + h_2},$$

$$\frac{PL}{1} = \frac{h_1}{h_1 + h_2},$$

Из подобия $\triangle CLQ$ и $\triangle ACD$ имеем:

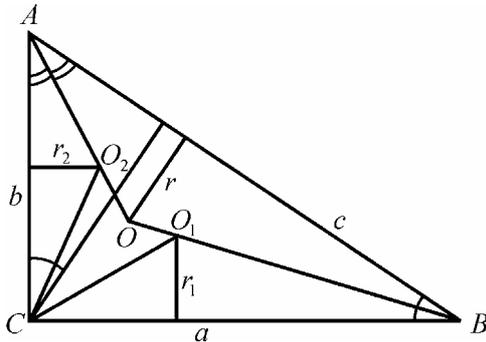
$$\frac{1+PQ}{2} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Если сложить (1) и (2), имеем: $PL + \frac{1+PQ}{2} = 1$.

Из подобия $\triangle DRQ$ и $\triangle BCD$ имеем:

$$\frac{RQ}{BC} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \Rightarrow PL = RQ, \quad PL + \frac{1+PL}{2} = 1, \quad PL = \frac{1}{3}, \quad PQ = \frac{5}{3}.$$

78. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD , равны r_1 и r_2 . Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.



Решение.

$\triangle AOB$, $\triangle BO_1C$, $\triangle AO_2C$, подобны (доказать самостоятельно).

Из подобия $\triangle CO_1B$ и $\triangle AOB$ следует:

$$\frac{a}{c} = \frac{r_1}{r}, \quad \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{a^2}{c^2}. \quad (1)$$

Из подобия $\triangle AO_2C$, и $\triangle BO_1C$ следует

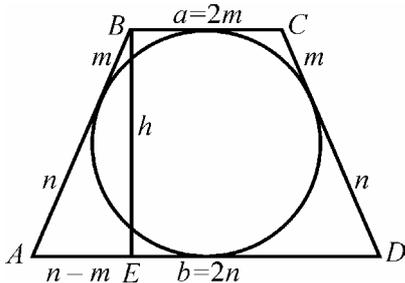
$$\frac{b}{c} = \frac{r_2}{r}, \quad \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{b^2}{c^2}. \quad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Но $a^2 + b^2 = c^2$, $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = 1$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

79. В равнобокую трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной m и n , считая от меньшего основания. Определить площадь трапеции.



Решение.

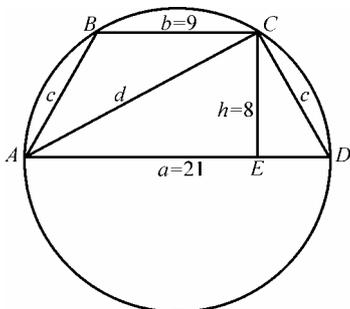
На основании свойства двух касательных

$$a = 2m, \quad b = 2n, \quad AE = n - m,$$

$$h = \sqrt{(m+n)^2 - (n-m)^2} = 2\sqrt{mn},$$

$$S_{\text{од}} = \frac{a+b}{2} h = \frac{2m+2n}{2} \cdot 2\sqrt{mn} = 2(m+n)\sqrt{mn}.$$

80. В равнобедренной трапеции даны основания $a = 11$ см, $b = 9$ см, высота $h = 8$ см. Найти радиус описанного круга.



Решение.

Радиус описанного круга (R) находим из $\triangle ACD$

$$\left(R = \frac{abc}{4S} \right):$$

$$R = \frac{adc}{4S_{\triangle ACD}} = \frac{adc}{4 \cdot \frac{1}{2} ah} = \frac{cd}{2h},$$

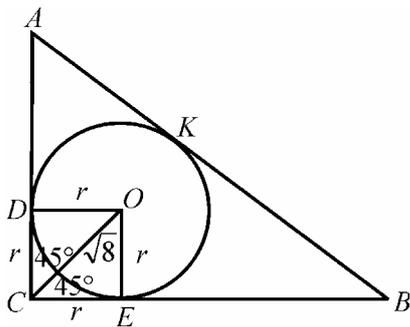
$$DE = \frac{a-b}{2} = \frac{21-9}{2} = 6,$$

$$c = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$d = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17.$$

$$R = \frac{10 \cdot 17}{2 \cdot 8} = \frac{85}{8} \text{ см}$$

81. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти стороны, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на $\sqrt{8}$ см.



Решение.

Пусть $AK = 2x$, $BK = 3x$,

$$r = \sqrt{8} \sin 45^\circ = \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$AD = AK = 2x$, $BK = BE = 3x$ (на основании свойства касательных),

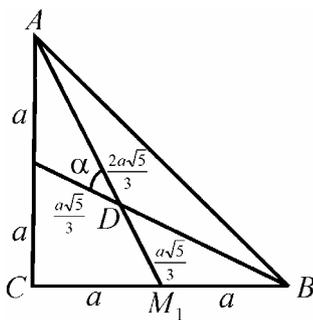
$$(2 + 3x)^2 + (2 + 2x)^2 = 25x^2, \quad x = 2,$$

$$a = r + 3x = 2 + 3 \cdot 2 = 8, \quad b = r + 2x = 6, \quad c = 5x = 5 \cdot 2 = 10.$$

82. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение.

Пусть $AC = BC = 2a$. $AM_1 = BM_2 = a\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора). Медианы пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины.



$$M_2D = \frac{a\sqrt{5}}{3}, \quad AD = \frac{2\sqrt{5}}{3}a.$$

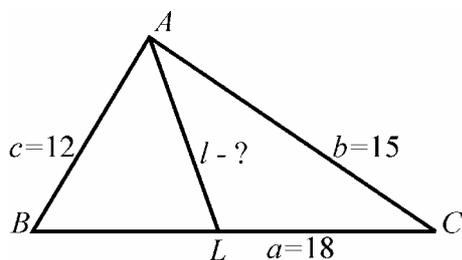
Из $\triangle AM_2D$ по теореме косинусов найдем α .

$$a^2 = \frac{5a^2}{9} + \frac{20}{9}a^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{3} \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arccos \frac{4}{5} \text{ или } \pi - \arccos \frac{4}{5}.$$

83. Вычислить длину биссектрисы угла A $\triangle ABC$ с длинами сторон $a = 18$ см, $b = 15$ см, $c = 12$ см.



Решение.

На основании свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{BL}{18 - BL} = \frac{12}{15}, \quad BL = 8.$$

Найдем $\cos \beta$ из $\triangle ABC$:

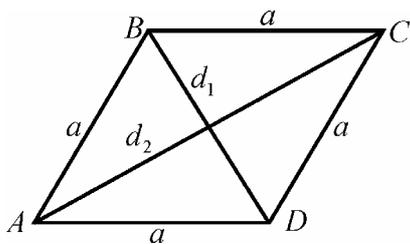
$$15^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cos \beta, \quad \cos \beta = \frac{9}{16}.$$

Из $\triangle ABL$ найдем AL :

$$l^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cos \beta, \quad l^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{9}{16},$$

$$l^2 = 100, \quad l = 10 \text{ (см)}.$$

84. Сумма длин диагоналей ромба равна m , а его площадь S . Найти сторону ромба.



Решение.

$$d_1 + d_2 = m,$$

$$\underbrace{d_1^2 + d_2^2}_{4a^2} + \underbrace{4d_1d_2}_{4S} = m^2,$$

$$4a^2 + 4S = m^2, \quad a = \frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{2}.$$

85. Периметр ромба равен 2 м, длины его диагоналей относятся как 3:4. Найти площадь ромба.

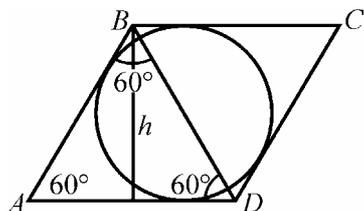
Решение.

$$a = \frac{1}{2}, \quad d_1 = 3x, \quad d_2 = 4x, \quad 4a^2 = (3x)^2 + (4x)^2,$$

$$x^2 = \frac{1}{25}, \quad S = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x = 6x^2 = 6 \cdot \frac{1}{25} = \frac{6}{25}.$$

86. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом 2 см. Найти сторону ромба.

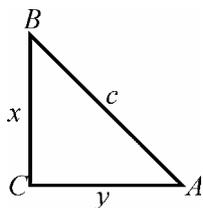
Решение.



$$h = 2r = 4,$$

$$a = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

87. Сумма катетов прямоугольного треугольника постоянна и равна m . Для какого треугольника гипотенуза имеет наименьшую длину?



Решение.

По условию, $x + y = m$,

$$c^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (m - x)^2 = 2x^2 - 2mx + m^2,$$

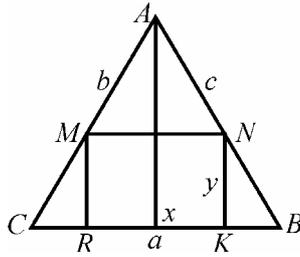
$$c = \sqrt{2x^2 - 2mx + m^2},$$

$$c'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 2mx + m^2}} \cdot (4x - 2m), \quad c'(x) = 0,$$

$$4x - 2m = 0,$$

$$x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{m}{2}, \text{ т. е. треугольник — равнобедренный.}$$

88. Какой из вписанных в данный треугольник прямоугольников имеет наибольшую площадь?



Решение.

$$S = xy.$$

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ имеем:

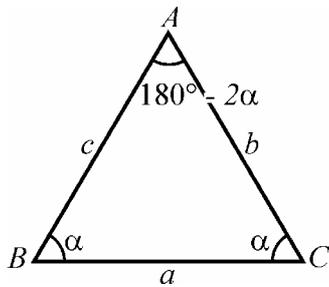
$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h-y}, \quad y = h - \frac{h}{a}x,$$

$$S = x \left(h - \frac{h}{a}x \right) = hx - \frac{h}{a}x^2,$$

$$S'(x) = h - \frac{2h}{a}x, \quad S'(x) = 0, \quad h - \frac{2h}{a}x = 0, \quad x = \frac{a}{2},$$

$$y = h - \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{h}{2}, \quad \text{т. е. } MN \text{ — средняя линия.}$$

89. Каким должно быть основание равнобедренного треугольника с заданной площадью S , чтобы его периметр был наибольшим?



Решение.

Введем угол α .

$$a = 2R \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2R \sin 2\alpha,$$

$$b = 2R \sin \alpha,$$

$$P = 2R \sin 2\alpha + 4R \sin \alpha = 2R(\sin 2\alpha + 2\sin \alpha),$$

$$P'(\alpha) = 2R(2 \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha),$$

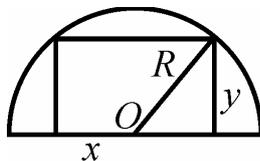
$$2 \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0, \quad 2 \cos^2 \alpha - 1 + \cos \alpha - 1 = 0, \quad \cos \alpha = -1,$$

$$\alpha = \pi, \quad \alpha \in (0; \pi), \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Следовательно, $\triangle ABC$ — равносторонний.

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{3}}.$$

90. В полуокруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить периметр этого прямоугольника.



Решение.

$$S = xy, \quad \text{но } y = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}},$$

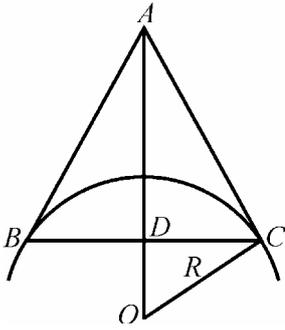
$$S = x \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{R^2 x^2 - \frac{x^4}{4}},$$

$$S'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 x^2 - \frac{x^4}{4}}} \cdot (2R^2 x - x^3), \quad S'(x) = 0, \quad 2R^2 x - x^3 = 0,$$

$$x(2R^2 - x^2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}R,$$

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad P = 3\sqrt{2}R.$$

91. На основании равнобедренного треугольника, как на хорде, построена окружность, касательная к равным сторонам треугольника. Найти радиус окружности, если основание треугольника a и высота h .



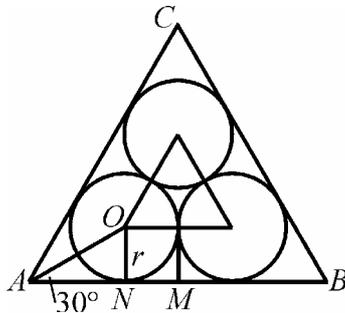
Решение.

$\triangle BOC$ — прямоугольный, CD — высота, опущенная из вершины прямого угла C на гипотенузу OB :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h \cdot OD,$$

$$R^2 = OD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad R = \frac{a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{4h}.$$

92. В равносторонний треугольник вписаны три равных круга так, что каждый касается двух сторон треугольника и двух других кругов. Определить радиус этих кругов, если сторона треугольника равна a .



Решение.

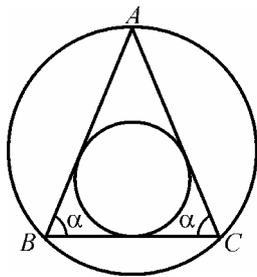
Обозначим искомый радиус r , тогда $AN + r = \frac{a}{2}$,

$$AO = 2r, \quad AN = r\sqrt{3} \quad (\text{из } \triangle AON),$$

$$r\sqrt{3} + r = \frac{a}{2},$$

$$r = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

93. Определить площадь равнобедренного треугольника, зная площади 4π вписанного и 25π описанного около него кругов.



Решение.

Определим радиус вписанного круга:

$$4\pi = \pi r^2, \quad r = 2.$$

Радиус описанной окружности

$$25\pi = \pi R^2, \quad R = 5.$$

Пусть $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, $\angle A = 180^\circ - 2\alpha$.

Известно, что в треугольнике $\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

В данном случае имеем:

$$\frac{r}{R} = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \sin \frac{180^\circ - 2A}{2} = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos A,$$

$$\text{т.е. } 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha = \frac{2}{5}, \quad 2(1 - \cos \alpha) \cos \alpha = \frac{2}{5},$$

$$\cos^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{5} = 0,$$

$$\cos \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{5}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{5}} = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{65 - 10\sqrt{10}}}{10} \text{ или } \sin \alpha = \frac{\sqrt{65 + 10\sqrt{10}}}{10},$$

$$S_{\Delta} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

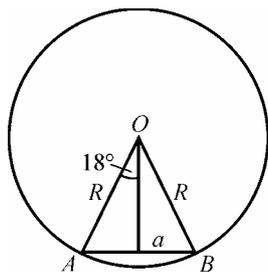
$$S_{\Delta} = 2R^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = 4R^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha,$$

$$S_{\Delta ABC} = 100 \cdot \frac{\sqrt{(65 - 10\sqrt{10})^3}}{1000} \cdot \frac{5 + \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{(65 - 10\sqrt{10})^3} (5 + \sqrt{10})}{100}$$

или

$$S_{\Delta ABC} = 100 \cdot \frac{\sqrt{(65 + 10\sqrt{10})^3}}{1000} \cdot \frac{5 - \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{(65 + 10\sqrt{10})^3} (5 - \sqrt{10})}{100}.$$

94. Сторону правильного десятиугольника выразить через радиус описанной окружности.



Решение.

$$a = 2R \sin 18^\circ.$$

Вычислим без таблицы $\sin 18^\circ$:

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ,$$

$$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ,$$

$$2\sin 18^\circ = (4\cos^2 18^\circ - 3),$$

$$2\sin 18^\circ = 4 - 4\sin^2 18^\circ - 3,$$

$$4\sin^2 18^\circ - 2\sin 18^\circ - 1 = 0,$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad a = R \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

95. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3} + 1$.

Решение.

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}, \quad \frac{\frac{a+b-c}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}, \quad \frac{a+b-c}{c} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1},$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}, \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + 1,$$

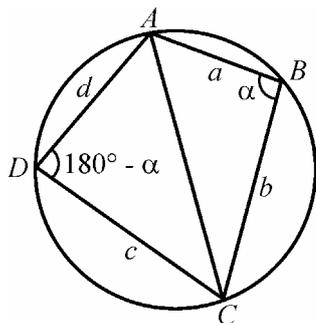
$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Возведем в квадрат:

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2\alpha = 60^\circ, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: $30^\circ, 60^\circ$.

96. Вычислить площадь вписанного четырехугольника по заданным его сторонам a, b, c, d .



Решение.

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ADC , в которых угол B обозначен через α и тогда угол $D = 180^\circ - \alpha$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha + \frac{1}{2} cd \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin \alpha.$$

Выразим $\sin \alpha$ через стороны a, b, c, d . По теореме косинусов из $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ имеем:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha.$$

Отсюда $\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)},$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{4(cd + ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}}{2(cd + ab)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(2cd + 2ab + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2cd + 2ab - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)}}{2(cd + ab)} =$$

$$= \frac{\sqrt{((a+b)^2 - (c-d)^2)((c+d)^2 - (a-b)^2)}}{2(cd + ab)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a+b)(c+d+a-b)}}{2(cd + ab)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2d)}}{2(cd + ab)} =$$

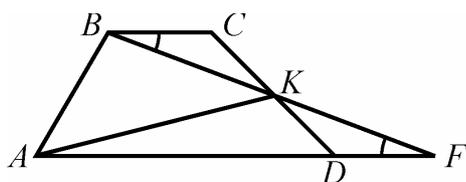
$$= \frac{\sqrt{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)}}{2(cd + ab)},$$

$$S = (ab + cd) \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то

$$S = \sqrt{abcd}, \text{ так как } a + c = b + d.$$

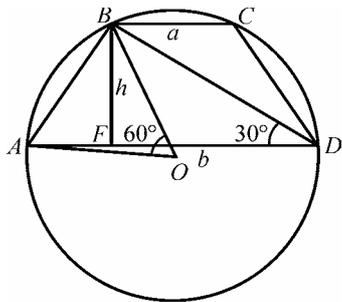
97. Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Площадь треугольника ABK равна S . Найти площадь трапеции.



Решение.

Проведем прямую BK до пересечения с прямой AD в точке F . $\triangle BCK$ и $\triangle KDF$ равны (доказать самостоятельно). Следовательно, равны их площади. Трапеция $ABCD$ равновелика треугольнику ABF . В $\triangle ABF$ имеем $BK = KF$, поэтому площади треугольников ABK и AKF равны. Итак, площадь $\triangle ABF$, а значит, и трапеции $ABCD$ равна $2S$.

98. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h , а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60° .



Решение.

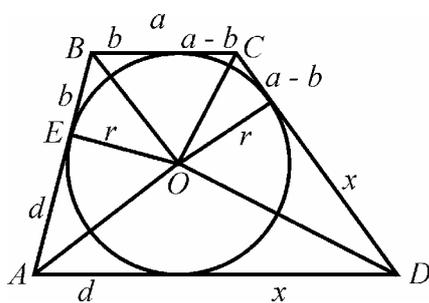
$$S = \frac{a+b}{2} h,$$

$$\sphericalangle AB = 60^\circ, \sphericalangle ABD = 30^\circ,$$

$$FD = \frac{a+b}{2} = h \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}h,$$

$$S = \sqrt{3}h \cdot h = \sqrt{3}h^2.$$

99. В трапецию вписана окружность. Найти площадь трапеции, если известны длина a одного из оснований и отрезки b и d , на которые разделена точкой касания одна из боковых сторон (отрезок b примыкает к данному основанию a).



Решение.

$\triangle ABO$ — прямоугольный (доказать самостоятельно).

$$r = \sqrt{BE \cdot AE} = \sqrt{bd}.$$

$$\text{Высота трапеции } h = 2\sqrt{bd}.$$

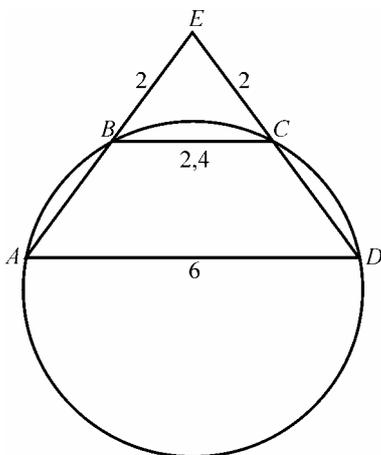
Из $\triangle COD$ имеем:

$$r = \sqrt{(a-b)x}, \sqrt{bd} = \sqrt{(a-b)x}, x = \frac{bd}{a-b},$$

$$AD = d + x = d + \frac{bd}{a-b} = \frac{ad}{a-b},$$

$$S = \frac{BC + AD}{2} h = \frac{a + \frac{ad}{a-b}}{2} \cdot 2\sqrt{bd} = \frac{a^2 - ab + ad}{a-b} \cdot \sqrt{bd}.$$

100. Из точки, лежащей вне круга, проведены две секущие, внешние части которых равны по 2 м. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения секущих с окружностью, зная, что длины двух противоположных сторон равны 6 и 2,4 м.



Решение.

$$AE \cdot BE = DE \cdot EC \text{ (свойство двух секущих), } BE = EC = 2 \text{ м.}$$

Следовательно, $AE = DE$, $AB = CD$. $ABCD$ — трапеция (доказать самостоятельно).

Из подобия $\triangle AED$ и $\triangle BEC$ имеем

$$\frac{6}{2,4} = \frac{AB + 2}{2}, AB = 3.$$

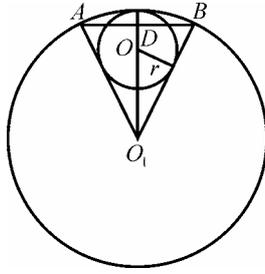
Находим высоту трапеции:

$$h^2 = 9 - \left(\frac{6 - 2,4}{2}\right)^2 = 2,4^2, h = 2,4,$$

$$S = \frac{2,4 + 6}{2} \cdot 2,4 = 10,08.$$

101. Радиус сектора равен R , а хорда его дуги равна a . Определить радиус круга, вписанного в этот сектор.

Решение.

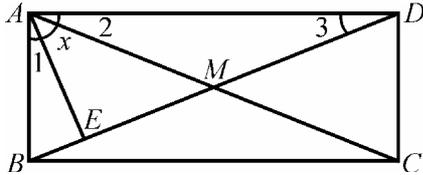


Рассмотрим два подобных прямоугольных треугольника: O_1BD и O_1CO .

$$\text{Из подобия следует } \frac{a}{2} = \frac{R}{R-r},$$

$$\text{Отсюда } r = \frac{aR}{a+2R}.$$

102. Дан прямоугольник; перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении 3:1. Найти угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.



Решение.

Пусть искомый угол x . Диагонали прямоугольника равны и делятся пополам при пересечении.

$\triangle AMB$ — равнобедренный.

$\angle 2 = \angle 3$, $\angle 3 = \angle 1$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

$$\text{Отсюда } \angle 1 = \angle 2; \angle 1 = \frac{90^\circ}{4} = 22^\circ 30'.$$

Тогда искомый угол x равен 45° .

103. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найти длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований равны a и b .

Решение.

1. Определим MN :

$$MN = \frac{2ab}{a+b} \text{ (см. задачу №51).}$$

2. Из подобия $\triangle MPN$ и $\triangle BPC$ имеем:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{h_1 + h_2}{h_1}, \text{ т.е. } \frac{a}{a+b} = \frac{h_1}{h_2},$$

$$\frac{a+b}{2b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}. \quad (1)$$

3. Из подобия $\triangle BOC$ и $\triangle OEF$ имеем

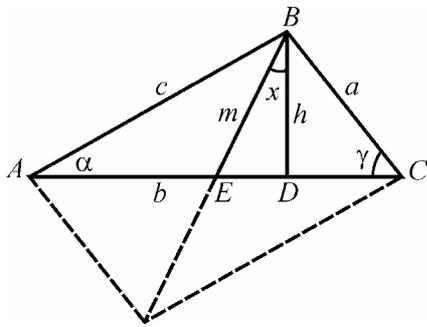
$$\frac{a}{x} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}. \quad (2)$$

4. Сложим равенства (1) и (2):

$$\frac{a+b}{2b} + \frac{a}{x} = 1, \text{ откуда } x = \frac{2ab}{b-a}.$$

104. Найти угол между высотой и медианой треугольника, проведенными из одной и той же вершины, зная углы α , β и γ треугольника.

Решение.



Обозначим стороны $\triangle ABC$ через a, b, c . Проведем высоту BD и медиану BE , обозначив их через h и m :

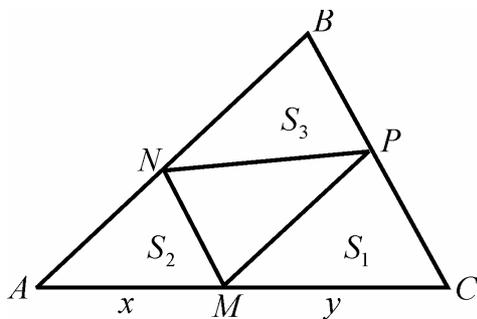
$$\cos x = \frac{m}{h} = \frac{c \sin \alpha}{m}, \quad m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2},$$

$$\cos x = \frac{2c \sin \alpha}{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}.$$

Но, по теореме синусов, $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$,

$$\cos x = \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta}}.$$

105. Через точку M основания AC треугольника ABC проведены прямые MN и MP , параллельные сторонам треугольника. Точки N и P пересечения этих прямых со сторонами треугольника соединены отрезком прямой. Найти площадь $\triangle NBP$, если площади $\triangle ANM$ и $\triangle MPC$ равны S_1 и S_2 .



Решение.

Пусть $AM = x$, $MC = y$.

Из подобия $\triangle ANM$ и $\triangle MPC$ имеем

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2, \quad \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{x}{x+y}. \quad (a)$$

Из подобия $\triangle MPC$ и $\triangle ABC$ имеем

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{x+y}\right)^2, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{y}{x+y}. \quad (b)$$

Сложив равенства (а) и (б), получим:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = 1, \quad S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} S_{MPBN} = \frac{1}{2} (S - S_1 - S_2) = \sqrt{S_1 S_2}.$$

106. По трем медианам треугольника m_a, m_b, m_c вычислить его площадь.

Решение.

Продолжим одну из медиан, например BL , на отрезок $LD = OL$. Соединив точку D с точками A и C , получим параллелограмм $A OCD$.

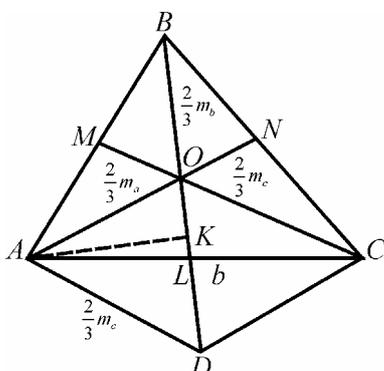
$$OB = OD = \frac{2}{3} m_b,$$

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \quad (\text{докажите самостоятельно}),$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 S_{\triangle AOD}.$$

Стороны $\triangle AOD$ равны:

$$AO = \frac{2}{3} m_a, \quad OD = \frac{2}{3} m_b, \quad AD = OC = \frac{2}{3} m_c,$$



$$S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{p\left(p - \frac{2}{3}m_a\right)\left(p - \frac{2}{3}m_b\right)\left(p - \frac{2}{3}m_c\right)},$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c\right) = \frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c).$$

После преобразований получим:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}.$$

107. По трем медианам треугольника m_a , m_b , m_c вычислить стороны треугольника a , b , c .

Решение.

Из параллелограмма $AOCD$ находим:

$$b^2 = 2\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2,$$

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}.$$

Аналогично находим

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}, \quad c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

108. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки K на AB , L на BC , M на CD и N на AD . При этом

$$\frac{AK}{KB} = 2, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CM}{MD} = 1, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}.$$

Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

Решение.

Соединим точку A с точкой C .

$$S_1 = \frac{1}{2}xy \sin B,$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4y \sin B = 6xy \sin B,$$

$$S_1 + S_2 = 12S_1, \quad S_3 = \frac{1}{2}zt \sin D,$$

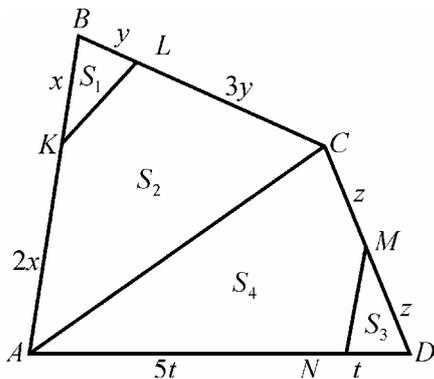
$$S_2 = 11S_1, \quad S_3 + S_4 = \frac{1}{2}2z \cdot 6t \sin D = 6zt \sin D,$$

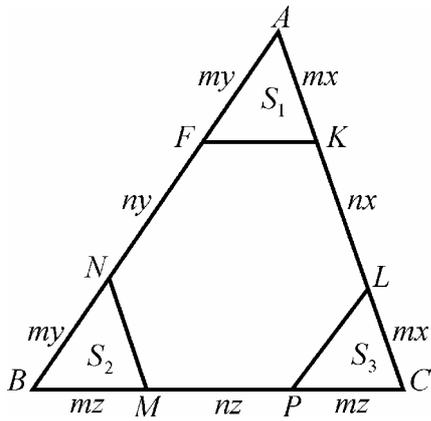
$$S_3 + S_4 = 12S_3, \quad S_4 = 11S_3,$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1 \text{ (по условию)}, \quad 12S_1 + 12S_3 = 1, \quad S_1 + S_3 = \frac{1}{12},$$

$$S_{AKLCMN} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

109. Площадь треугольника равна S . Каждая сторона треугольника разделена на три части в отношении $m:n:m$. Определить площадь шестиугольника, вершинами которого служат точки деления.





Решение.

$$S_1 = \frac{1}{2} m^2 xy \sin A,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} m^2 yz \sin B,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} m^2 xz \sin C,$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} m^2 (xy \sin A + yz \sin B + xz \sin C),$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (2m + n)^2 xy \sin A = S,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (2m + n)^2 xz \sin C = S,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (2m + n)^2 yz \sin B = S.$$

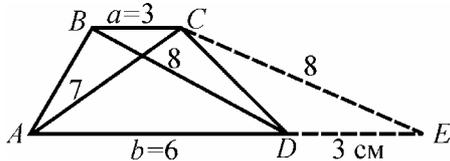
СЛОЖИМ:

$$3S = \frac{(2m + n)^2}{2} (xy \sin A + xz \sin C + yz \sin B) = \frac{2m + n}{2} \cdot \frac{2(S_1 + S_2 + S_3)}{m^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = 3S \left(\frac{m}{2m + n} \right)^2,$$

$$S_{MNFKLP} = S - 3S \left(\frac{m}{2m + n} \right)^2 = S \left(1 - \frac{3m^2}{(2m + n)^2} \right) = S \frac{m^2 + 4mn + n^2}{(2m + n)^2}.$$

110. Найти площадь трапеции, диагонали которой 7 и 8 см а основания — 3 и 6 см.



Решение.

Проведем $CE \parallel BD$.

$$AE = AD + BC = 9 \text{ см},$$

$$CE = BD.$$

Трапеция $ABCD$ и ΔABC равновелики, т. е. имеют равные площади, так как у них равны высоты и основание треугольника равно сумме оснований трапеции. Площадь ΔACE по формуле Герона равна

$$S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

111. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O . $S_{\Delta BOC} = 6 \text{ м}^2$, $BO = 2 \text{ м}$, $OD = 4 \text{ м}$. Найти площадь трапеции.

Решение.

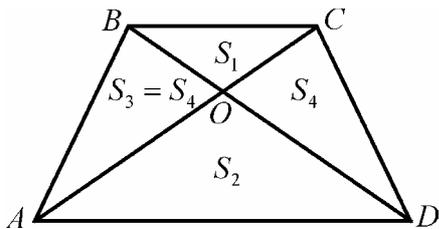
$$1. \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{2}{4} \right)^2 \text{ из подобия } \Delta BOC \text{ и } \Delta OAD, \frac{6}{S_2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = 24.$$

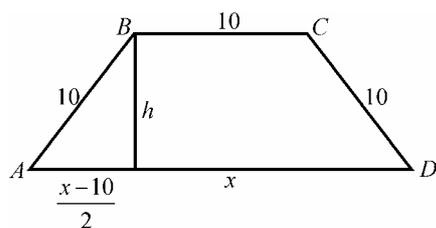
$$2. S_3 = S_4, S_1 S_2 = S_3 S_4 \text{ (см. задачу 6),}$$

$$\text{т.е. } S_3 S_4 = S_3^2 = S_4^2 = 24 \cdot 6 = 144, S_3 = S_4 = 12,$$

$$S_{\text{тр}} = 24 + 6 + 12 + 12 = 54 \text{ (м}^2\text{)}.$$



112. Боковая сторона равнобоковой трапеции равна ее меньшему основанию, длина которого 10 см. Какова должна быть длина большего основания трапеции, чтобы ее площадь была наибольшей?



Решение.

$$S = \frac{10+x}{2}h,$$

$$h^2 = 100 - \left(\frac{x-10}{2}\right)^2 = \frac{400 - x^2 + 20x - 100}{4} =$$

$$= \frac{300 - x^2 + 20x}{4},$$

$$h = \frac{\sqrt{300 - x^2 + 20x}}{2}, \quad S = \frac{x+10}{2} \cdot \sqrt{\frac{300 - x^2 + 20x}{2}},$$

$$S'(x) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{300 - x^2 + 20x} + \frac{1}{2\sqrt{300 - x^2 + 20x}} \cdot (20 - 2x)(x+10) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{300 - x^2 + 20x + 100 - x^2}{\sqrt{300 - x^2 + 20x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-2x^2 + 20x + 400}{\sqrt{300 - x^2 + 20x}},$$

$$S'(x) = 0, \text{ если } -2x^2 + 20x + 400 = 0,$$

$$x^2 - 10x - 200 = 0, \quad x = 20.$$