Использование метода координат при решении стереометрических задач

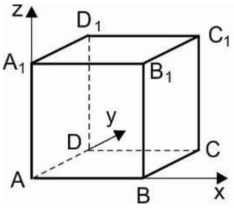
алгоритм решения   задач методом координат

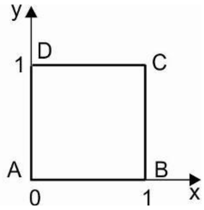
1. Ввести прямоугольную систему координат (выбор зависит от объекта).
2. Выписать координаты всех необходимых точек.
3. Вычислить координаты необходимых векторов.
4. Применить формулу, выполнить вычисления.
5. Записать ответ.

Примеры удобного задания системы координат.

Определите координаты вершин многогранников:

1. Единичный куб $A...D1$

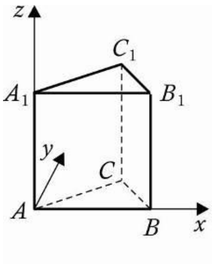


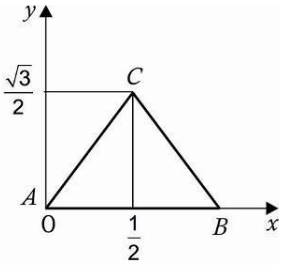


Решение: координаты вершин А (0,0,0), А1(0,0,1), В(1,0,0), В1(1,0,1),

D(0 ,1 ,0), D1(0,1,1), C(1,1,0), C1(1,1,1).

2. Правильная треугольная призма *A…C_1* , все ребра, которой равны 1.

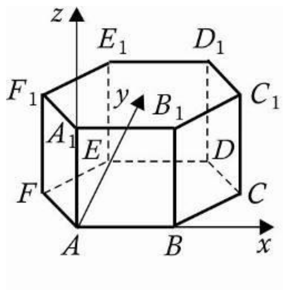


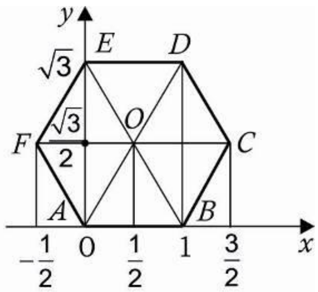


Решение: **координаты вершин: А (0,0,0),А $_1$(0,0,1),В(1,0,0),В1(1,0,1),**

С(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0),С$_1$(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1).

3. Правильная шестиугольная призма *A…F_1*, все ребра которой равны 1.



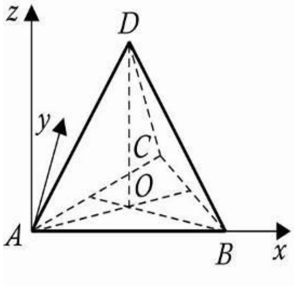


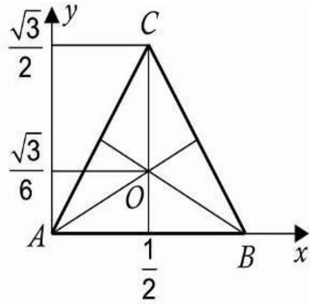
Решение: **координаты вершин: А (0,0,0),А $_1$(0,0,1),В(1,0,0),В1(1,0,1),**

С(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0),С$_1$(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1), D(1, $\sqrt{3}$,0), D_1(1, $\sqrt{3}$,1), E(0, $\sqrt{3}$,0), E_1(0, $\sqrt{3}$,1), F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

0), F_1(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1).

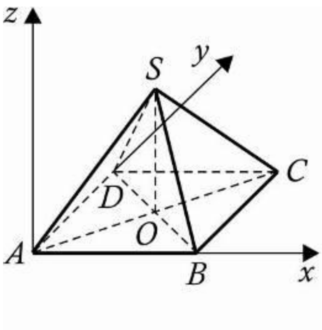
4. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) *ABCD* все ребра которой равны 1.

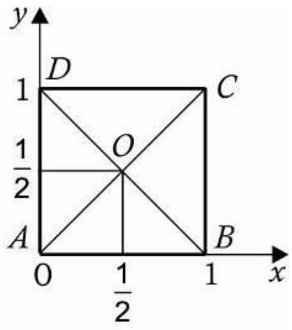




Решение: **координаты вершин: А(0,0,0), В(1,0,0), С(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0), D(0,5, $\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$),**

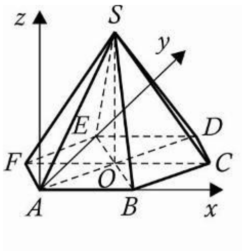
5. Правильная четырехугольная пирамида *SABCD*, все ребра которой равны 1.

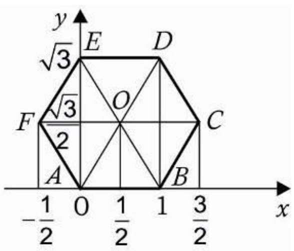




Решение: **координаты вершин: A0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), S(0,5;0,5;$\frac{\sqrt{2}}{2}$).**

6. Правильная шестиугольная пирамида *SABCDEF*, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.





СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛЕДУЮЩИХ ВИДОВ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

Применение метода координат даёт нам возможность для решения следующих задач:

1. **Нахождение угла между скрещивающимися прямыми**

- Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.
- 0°<(a,α)<90°.

Для нахождения угла φ между прямыми m и l, если векторы $\vec{q}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{p}(x_2; y_2; z_2)$ параллельны соотвественно этим прямым, используют формулу: $\cos\phi = \frac{|\vec{q}\cdot\vec{p}|}{|\vec{q}|\cdot|\vec{p}|}$ или в координатной форме $\cos\phi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

В частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Пример 1. *В прямоугольном параллелепипеде A*BCD $A_1B_1C_1D_1$ *стороны основания AB=5 и BC=3, а высота AA_1. Найдите угол между прямыми AC_1 и B_1 C. Найдите угол между прямыми AC_1 и B_1C.*

Решение 1 (поэтапно-вычислительный метод)

1) Пусть M – середина A_1B_1 (см рис. 1). Посмотрим плоскость MNPQ параллельную грани BB_1C_1C. Диагональ MP прямоугольника MNPQ пересекает диагональ параллелепипеда AC_1 в точке O и MP || B_1C. Следовательно, $\alpha = \angle MOC_1$ - искомый угол.

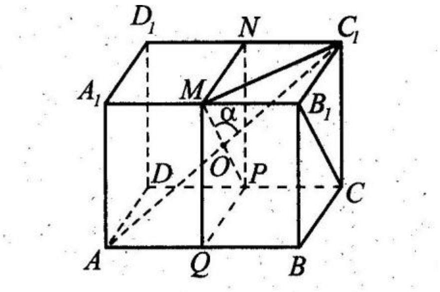


Рис. 1.

2) По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников MNP и MB_1C_1 и получим $MP^2 = MN^2 + NP^2 = 9 + 16 = 25$ и $MC_1^2 = MB_1^2 + B_1C_1^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 9 = \frac{61}{4}$ соответственно.

Тогда OM $= \frac{1}{2}MP = \frac{5}{2}$. $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2 = 25 + 9 + 16 = 50$ как диагональ прямоугольного параллелепипеда. Тогда $OC_1 = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{\sqrt{50}}{2}$. По теореме косинусов для треугольника OMC_1, получим $MC_1^2 = OM^2 + OC_1^2 - 2 \cdot OM \cdot OC_1 \cdot \cos\alpha$. Отсюда,

$$\cos\alpha = \frac{OM^2 + OC_1^2 - MC_1^2}{2 \cdot OM \cdot OC_1} = \frac{\frac{25}{4} + \frac{50}{4} - \frac{61}{4}}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{50}}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{50}$$. Таким образом, $\alpha = \arccos\frac{7\sqrt{2}}{50}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{7\sqrt{2}}{50}$

Решение 2 (метод координат)

1) Введем систему координат, как показано на рисунке 2, и найдем координаты нужных нам для решения точек: A(0;0;0) C_1(5;3;4), B_1(5;0;4), C(5;3;0). Координаты направляющих векторов интересующих нас прямых: $\overrightarrow{AC_1}$ (5;3;4) и $\overrightarrow{B_1C}$ (0;3;-4)

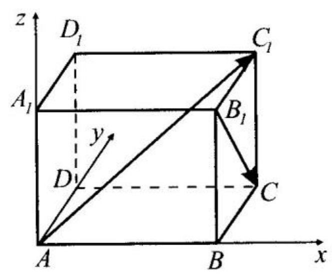


Рис. 2.

2) Тогда
$$\cos\alpha = \frac{|5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{50}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{7\sqrt{2}}{50}$

2. **Нахождение угла между прямой и плоскостью**

- Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.
- $0^\circ < (a,\alpha) < 90^\circ$.

Угол между прямой *l* и плоскостью α можно вычислить по формуле $\sin\phi = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|}$ или в координатах $\sin\phi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, где $\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\}$ - вектор нормали к плоскости *α*, $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$ - направляющий векор прямой *l*;

Пример1. *В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 6. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1*

Решение 1 (поэтапно-вычислительный метод)

1) Построим $BH \perp F_1C_1$ и $B_1K \perp BH$ (см рис. 5.).

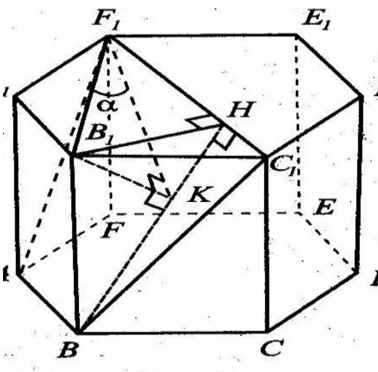


Рис. 5.

2) так как призма правильная, то B_1H – проекция BH на плоскость $A_1B_1C_1$. Следовательно, $B_1H \perp F_1C_1$ по теореме о трех перпендикулярах. Значит, $F_1C_1 \perp BB_1H$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда $F_1C_1 \perp BK$, так как прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Итак, $B_1K \perp BH$ и $B_1K \perp F_1C_1$. Следовательно, $B_1K \perp AF_1C_1$, значит $\alpha = \angle B_1F_1K$ – искомый угол.

3) Так как F_1C_1 – диаметр окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника, то $F_1C_1 = 2A_1B_1 = 2$. Тогда $C_1H = \frac{F_1C_1 - AB}{2} = \frac{1}{2}$, так как ABC_1F_1.- равнобедренная трапеция.

Используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$$BC_1=\sqrt{BB_1^2+B_1C_1^2}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$$

$$BH=\sqrt{BC_1^2-C_1H^2}=\sqrt{37-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{147}}{2}$$

$$B_1H=\sqrt{BH^2-BB_1^2}=\sqrt{\frac{147}{4}-36}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_1B_1=\sqrt{F_1H^2+B_1H^2}=\sqrt{(1+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{3}$$

В прямоугольном треугольнике BB_1H высота $B_1K=\frac{BB_1\cdot B_1H}{BH}=\frac{6}{7}$. Следовательно, $\sin\alpha=\frac{B_1K}{F_1B_1}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$, $\alpha=\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

Ответ: $\alpha=\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{7}$

Решение 2 (метод координат)

1) Введем систему координат, как показано на рисунке 6.

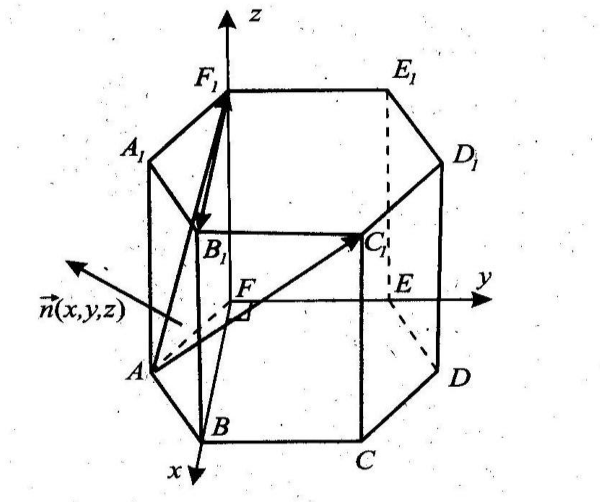


Рис. 6.

2) В этой системе координат найдем координаты нужных нам для решения точек: $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $F_1(0;0;6)$, $C_1(\sqrt{3};1;6)$, $B_1(\sqrt{3};0;6)$

3) Найдем координаты двух неколлинеарных векторов, лежащих в плоскости AF_1C_1: $\overrightarrow{AF_1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};6\right)$, $\overrightarrow{AC_1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};6\right)$

4) Обозначим через $\vec{n}(x,y,z)$ -вектор нормали к плоскости AF_1C_1 координаты которого нам нужно найти.

5) Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AF_1}\cdot\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+6z=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+6z=0 \end{cases}$$ Отсюда получим $\vec{n}(1;-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{6})$

6) Найдем координаты направляющего вектора $\overrightarrow{F_1B_1}\{\sqrt{3};0;0\}$.

Тогда $$\sin\alpha=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{F_1B_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_1B_1}\right|}=\frac{\left|1\cdot\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+0^2+0^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

Значит, $\alpha=\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

Ответ: $\alpha=\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{7}$

3. Нахождение угла между двумя плоскостями

- Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.
- Величина двугранного угла принадлежит промежутку$(0^\circ; 180^\circ)$
- Величина угла между двумя пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0^\circ; 90^\circ]$.
- Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0°.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно вычислить как угол между нормалями к этим плоскостям по формуле $\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$ или в координатной форме $\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, где $\overrightarrow{n_1}\{A_1;B_1;C_1\}$ - вектор нормали плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\overrightarrow{n_2}\{A_2;B_2;C_2\}$ - вектор нормали плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Пример 1. *Сторона куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Найдите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью A_1ED, где точка E – середина стороны BB_1.*

Решение 1 (поэтапно-вычислительный метод)

1) Построим сечение куба плоскостью A_1ED (см. рис. 8).

Очевидно, что отрезки A_1D и A_1E являются сторонами сечения. Грани AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны, значит секущая плоскость пересекает их по параллельным прямым. Поэтому, проведя через точку E прямую, параллельную прямой A_1D, по

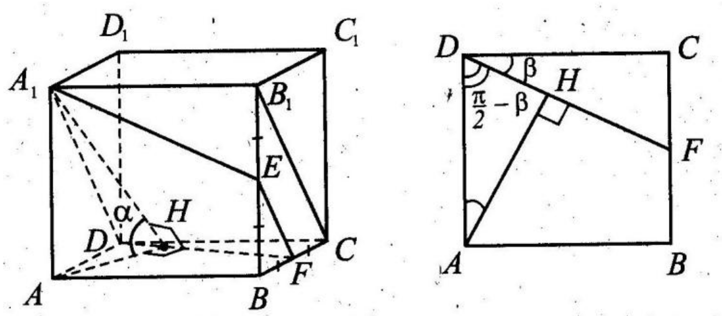


Рис. 8.

лучим точку F, принадлежащую сечению. Точки D и F лежат на одной грани, следовательно, A_1EFD- искомое сечение, причем, так как $EF \| A_1D \| B_1C$ и E – середина BB_1, то F – середина BC по теореме Фалеса.

Построим $AH \perp DF$. Так как AH- проекция A_1H на плоскость основания ABC, то $A_1H \perp DF$ по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, $\alpha = \angle A_1HA$ - искомый угол.

2) Пусть $\beta = \angle CDF$. Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta = \frac{CD}{DF} = \frac{CD}{\sqrt{CD^2 + FC^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AH}{AD}$, то $\frac{2}{\sqrt{5}} AD = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{AH}{A_1H} = \frac{AH}{\sqrt{AA_1^2 + AH^2}} = \frac{2}{3}$. Отсюда, $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$

Решение 2 (метод координат)

1) Введем систему координат, как показано на рисунке 9.

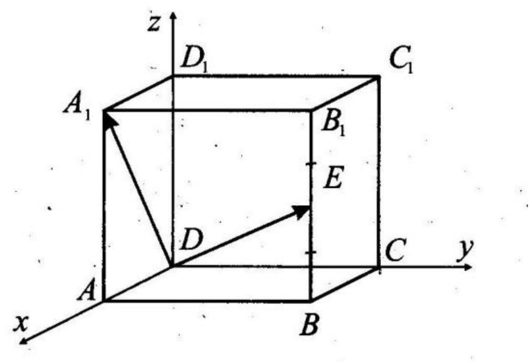


Рис. 9.

Определим координаты вектора нормали плоскости A_1ED/ Координаты точек, однозначно определяющих эту плоскость: D(0;0;0), A_1(2;0;2), E(2;2;1) координаты соответствующих векторов: $\overrightarrow{DA_1}(2;0;2)$ и $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$

2) Искомый вектор нормали $\overrightarrow{n_1}(x, y, z)$ перпендикулярен обоим найденным векторам. Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \end{cases}$$

Подставляя координаты векторов, получим:

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Пусть x=1. Тогда получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2 + 2z = 0 \\ 2 + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ее решения $y = -\frac{1}{2}, z = -1$. Таким образом, искомый вектор нормали имеет координаты $\overrightarrow{n_1}(1; -\frac{1}{2}; -1)$

3) Для плоскости основания ABC координаты вектора нормали определяются из рисунка $\overrightarrow{n_2}(0;0;1)$. Тогда искомый угол α между плоскостями можно найти следующим образом:

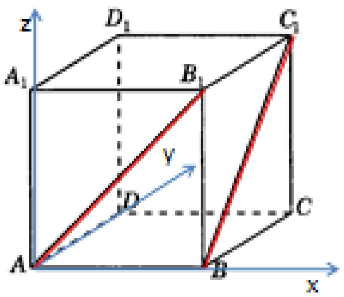
$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|1 \cdot 0 + (-\frac{1}{2}) \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда, $\alpha = arc \cos \frac{2}{3}$

Ответ: $\alpha = arc \cos \frac{2}{3}$

3. Примеры решения задач

3.1. В единичном кубе найти угол между прямыми AB_1 и BC_1



Введем систему координат и найдем координаты точек A, B, B_1, C_1

Находим координаты направляющих векторов прямых AB_1 и BC_1 по формуле 1.

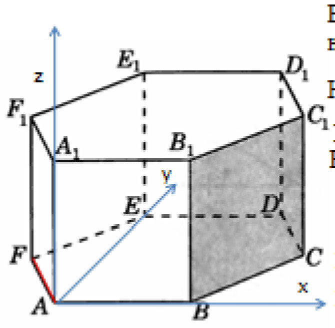
$$\overline{AB_1}\{1;0;1\}, \overline{BC_1}\{0;1;0\}$$

Косинус угла φ между прямыми AB_1 и BC_1 определяется по формуле 1.1:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \varphi = 60^\circ$$

Ответ: 60°

3.2. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой AF и плоскостью BCC_1



Введем систему координат и находим координаты нужных точек.

вспомним?

Найдем координаты вектора $AF\left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right\}$.

Плоскость BCC_1 совпадает с плоскостью грани BB_1C_1C; зададим ее с помощью точек $B(1;0;0)$, $B_1(1;0;1)$, $C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Пусть ax+by+cz+d=0 – уравнение плоскости BCC_1

$B(1;0;0) \in (BCC_1) \Rightarrow a+d=0$ $\qquad d=-a$

$B_1(1;0;1) \in (BCC_1) \Rightarrow a+c+d=0$ $\qquad c=0$

$C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \in (BCC_1) \Rightarrow a\cdot\frac{3}{2}+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$ $\Rightarrow$ $b=-\frac{a}{\sqrt{3}}$

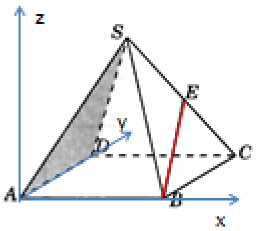
Уравнение плоскости BCC_1 примет вид $ax-\frac{a}{\sqrt{3}}y-a=0$ или $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

Вектор нормали : $\vec{n}\{\sqrt{3};-1;0\}$

Синус искомого угла: $\sin\varphi=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot 0\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2+0}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; *Ответ* : $\varphi=60°$

вспомним?

3.3. В правильной четырехугольной пирамиде , все ребра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E- середина ребра SC



Координаты точки E определим по формуле 3:

вспомним?

$E\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ и $\overline{BE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$

Пусть уравнение плоскости ADS ax+by+cz+d=0

Из того, что $A(0;0;0)$, $D(0;1;0)$ $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in (ADS)$

вспомним?

следует, что d=0, b+d=0 и : $a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+d=0$

Отсюда получим, что $a=-\sqrt{2}c, b=0, d=0$ и уравнение плоскости ADS примет вид:

$-\sqrt{2}cx+cz=0$, или $\sqrt{2}x-z=0$. Вектор нормали $\vec{n}\{\sqrt{2};0;-1\}$

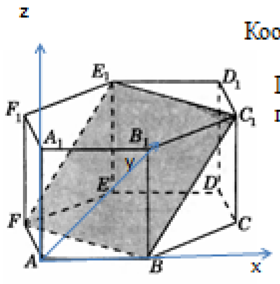
Синус угла между прямой BE плоскостью ADS определим по формуле 1.2

вспомним?

$$\sin\varphi=\frac{\left|\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+0\cdot\frac{3}{4}+(-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ : $\frac{\sqrt{2}}{3}$

3.5. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки А до плоскости BFE_1



Координаты точек $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ и $E_1(0;\sqrt{3};1)$ $F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Подставив координаты точек B, F и E_1 в общее уравнение плоскости получим систему уравнений:

$$B \in (BFE_1) \Rightarrow a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \in (BFE_1) \Rightarrow a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$E_1(0;\sqrt{3};1) \in (BFE_1) \Rightarrow b\cdot\sqrt{3}+c\cdot 1+d=0$$

Откуда $d=-a, c=-2a, b=a\sqrt{3}$

Уравнение плоскости примет вид: $ax+\sqrt{3}ay-2az-a=0$, или $x+\sqrt{3}y-2z-1=0$

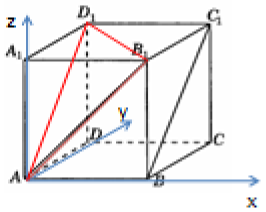
Вектор нормали: $\vec{n}\{1;\sqrt{3};-2\}$

Вычислим расстояние h от точки A до плоскости BFE_1 по формуле 1.4:

$$h=\frac{1\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 0+(-2)\cdot 0-1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3.6. В единичном кубе $A...D_1$, найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1



При параллельном переносе на вектор $\overline{BA}$ прямая BC_1 отображается на прямую AD_1. Таким образом, плоскость AB_1D_1 содержит прямую AB_1 и параллельна прямой BC_1. Расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 находим как расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1

Пусть ax+by+cz+d=0 – уравнение плоскости AB_1D_1.

Так как $A(0;0;0) \in (AB_1D_1) \Rightarrow d=0$

$B_1(1;0;1) \in (AB_1D_1) \Rightarrow a=-c$

$D_1(0;1;1) \in (A_1B_1D_1) \Rightarrow b=-c$

Уравнение плоскости запишется как –cx-cy+cz=0, или x+y+z=0..

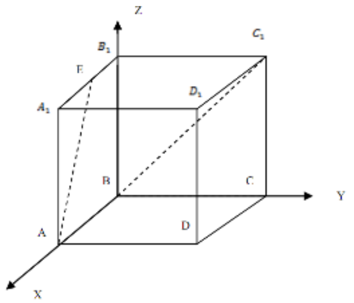
Вектор нормали $\vec{n}\{1;1;-1\}$

Расстояние h от точки $B(1;0;0)$ до плоскости AB_1D_1 находим по формуле 1.4

$$h=\frac{|1\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 AB=2, AD=4, AA1=3. Точка E- середина ребра A1B1 . Найдите угол между прямыми BC1 и AE



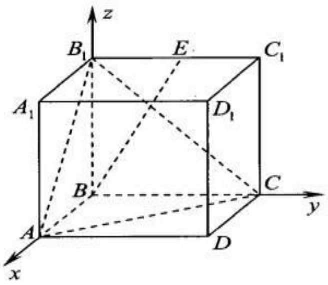
Решение: Пусть точка B(0;0;0)-начало координат. Тогда C1(0;4;0), A(3;0;0), E(1,5;0;3).

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BC_1}\{0;4;0\}$ и $\overrightarrow{AE}\{-1{,}5;0;3)\}$.

По формуле: $\cos\left(\widehat{\bar{a},\ \bar{b}}\right)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$. находим

$\cos\angle(BC1;AE)=\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

Пример 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и AA_1 равны 1, а ребро $AD=2$. Точка E – середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью (AB_1C).



Решение: Составим уравнение плоскости (AB_1C.): *ax+by+cz+d=0, где a, b и c* – координаты нормали к плоскости. Чтобы составить это уравнение, необходимо определить координаты трёх точек, лежащих в данной плоскости: A(1; 0; 0), B_1(0;0;1), C(0;2;0).

Решая систему $\begin{cases} a+d=0, \\ c+d=0, \\ 2b+d=0, \end{cases}$

находим коэффициенты a, b и c уравнения *ax+by+cz+d=0: a= -d, b=*$-\dfrac{d}{2}$, *c=-d.* Таким образом, уравнение примет вид $-dx-\dfrac{d}{2}y-dz+d=0$ или, после упрощения, *2x+y+2z-2=0*. Значит, нормаль n к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}\{2;1;2\}$.

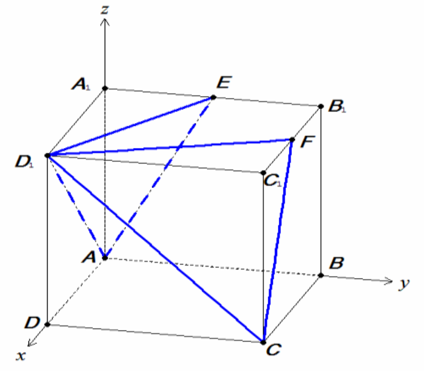
Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BE}\{0;-1;-1\}$

Найдем угол между вектором $\overrightarrow{BE}$ и нормалью к плоскости по формуле скалярного произведения векторов:

$$\sin\phi=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{|-1\cdot1-1\cdot2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot3}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: 45˚

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F-середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.



Решение: Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A(0;0;0). Далее находим координаты тех точек, которые необходимы для составления уравнений плоскостей: D_1(1;0;1), E(0;0,5;1), C(1;1;0), F(0,5;1;1). Составим уравнение плоскости

(AD_1E), используя уравнение $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$. Подставим координаты всех трех точек

в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0; \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0; \\ A\cdot 0 + B\cdot 0{,}5 + C\cdot 1 + D = 0. \end{cases}$$

Получим, что A= - C, B= - 2C, D= 0. Таким образом, уравнение примет вид: x +2y – z =0.

Значит, A_1=1, B_1= 2, C_1= -1

Составим уравнение плоскости (CFD_1), используя уравнение $A_2x+B_2y+C_2z+D_1=0$.

Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 0 + D = 0; \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0; \\ A\cdot 0{,}5 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D = 0. \end{cases}$$

Получим, что B = C, A = 2C, D = - 3C. Таким образом, уравнение примет вид:

2x +y +z – 3 = 0. Значит, $A_2 = 2$, $B_2 = 1$, $C_2 = 1$. По формуле:

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|1\cdot 2+2\cdot 1-1\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточно простой в применении, метод координат является необходимой составляющей решения задач различного уровня. Метод координат имеет преимущества перед другими, что не требует сложных построений в проекциях. По той простой причине, что этот метод заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними), то есть одно без другого не работает. Этот метод - довольно мощный (то есть ему поддаются даже самые «непробиваемые» казалось, бы задачи). Все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), здесь получаются как бы сами собой, в ходе вычислений. Единственный его, пожалуй, недостаток – это требуемый нередко большой объем вычислений.

В результате выполнения данной работы был рассмотрен метод координат в курсе школьной геометрии 10-11 класса. С помощью метода координат можно быстро и успешно решать стереометрические задачи из ЕГЭ в блоке С (задание С2). В рамках данной работы рассмотрены типовые задачи ЕГЭ – С2, также их решение с помощью метода координат.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Ю. Н. Стереометрия. Методы и приемы решения задач, Калининград, Изд. Российского государственного университета, 2010 г., гл II, стр. 48-72.
2. Математика в школе №4 (2011). Холева О. В. Нахождение углов между прямыми и плоскостями (координатно-векторный метод).
3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10-11 класс, М.: Просвещение, 2008 г.
4. Гусев В. А. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. вузов, М.: AcademiA, 2004 г.
5. Д.М. Безухов, В.М. Пекер. Стреометрия. Эффективные методы решения задач, Москва, Санкт-Петербург «Просвещение», 2012.
6. В. А. Смирнов. Задача С2. Геометрия. Стереометрия. МИОО, 2013
7. Е.Н. Васильева. Подготовка к ЕГЭ. Легион, 2013
8. С.Ю. Кулабухов. Решение задач по стереометрии методом координат. Легион, 2013