A

задачи,

сводящиеся к решению линейных уравнений

с двумя переменными.

Часто в жизни людей встречаются задачи, приводящие к решению диофантовых уравнений, которые необходимо быстро и правильно решать.

Данный сборник задач экономического содержания предназначен

для обучающихся, которые интересуются данным вопросом;

учителей, преподающих курсы по выбору, элективные курсы;

, для экономистов и инженеров, решающих хозяйственные вопросы и

всех интересующихся эффективным ведением финансово – экономической деятельности.

Справочный материал.

Уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, решаемые во множестве целых (реже рациональных) чисел, вошли в историю математики как ***диофантовы.***

Наиболее изучены диофантовы уравнения 1 и 2 степени. В содержание нашей работы включены задачи, которые сводятся к решению уравнения первой степени с двумя неизвестными

$ax + by = c$ (1)

Рассмотрим задачу.

В клетке находится *x* фазанов и *y* кроликов. Сколько в клетке фазанов и кроликов, если общее количество ног равно 62.

Общее число ног можно записать с помощью уравнения $2x+4y=62$ (*)

Это равенство, которое мы составили по условию задачи называют линейным *уравнением с двумя переменными.*

Определение. ***Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида ax+by=c, где x*** *и* ***y – переменные, a, b*** *и* ***c – некоторые числа.***

Однозначно определить из уравнения (*) значения *x* и *y* нельзя. Даже если ограничиться только натуральными значениями переменных, здесь могут быть такие случаи: 1 и 15, 3 и 14, 5 и 13 и т. д.

Определение. ***Пара чисел (a, b) называется решением уравнения с двумя переменными, если при замене x на a*** *и* ***y на b получаем истинное равенство.***

Каждому уравнению с двумя переменными соответствует множество его решений, т. е. множество, состоящее из всех пар чисел *(a, b)*, при подстановке которых в уравнение получается истинное равенство. При этом, конечно, если заранее указаны множества *X и Y*, которые могут принимать неизвестные *x и y,* то надо брать лишь такие пары *(a, b),* для которых *a принадлежит X* и *b принадлежит Y*.

Определение. Два уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения называются ***равносильными.***

Например, равносильны уравнения $x+2y=5$ *и* $3x+6y=15$ – любая пара чисел, удовлетворяющая одному из этих уравнений, удовлетворяет и второму.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1. 1) *если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;*
2. 2) *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

С помощью линейных уравнений с двумя переменными можно решать различные текстовые задачи, которые сводятся обычно к нахождению целых (натуральных) решений уравнения, причем часто коэффициенты при переменных в этих уравнениях являются целыми числами.

Способы решения диофантовых уравнений.

Существует несколько способов решения уравнения (1).

Решение диофантовых уравнений способом перебора вариантов.

Задача. Андрей работает летом в кафе. За каждый час ему платят 10 р. И высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 180 р. Определите, сколько часов он работал и сколько разбил тарелок, если известно, что он работает не более 3 ч в день.

Решение.

Пусть x часов он всего работал в неделю, тогда $10x$ р. ему заплатили, но он разбил y тарелок, и с него вычли $2y$ р. Имеем уравнение $10x - 2y = 180$, причем x меньше или равен 21. Получим: $5x - y = 90$, $5x = 90 + y$, $x = 18 + –$.

Так как x целое число, то y должно нацело делится на 5, чтобы в правой части получилось целое число. Возможны четыре случаи:

1) *$y=0$, $x=18$, т. е. решением является пара – (18, 0);*
2) *$y=5$, $x=19$, (19, 5);*
3) *$y=10$, $x=20$, (20, 10);*
4) *$y=15$, $x=21$, (21, 15).*

Решение диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида

Алгоритм Евклида.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел:

1) надо большее из двух чисел разделить на меньшее;

2) потом меньшее из чисел на остаток при первом делении;

3) затем остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка.

Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД двух данных чисел

Рассмотрим пример. *Найти НОД (645; 381).*

Решение.

Разделим с остатком 645 на 381. Мы получим: $645=381\cdot1+264$.

Далее разделим с остатком 381 на 264, получим: $381=264\cdot1+117$.

Теперь разделим с остатком 264 на 117, получим: $264=117\cdot2+30$.

Продолжим процесс деления, разделим с остатком 117 на 30, получим: $117=30\cdot3+27$. Далее, $30=27\cdot1+3$. Следующий шаг – делим 27 на 3, получаем, что 27=3·9 +0, т. е. 27 делится на 3 без остатка. Значит, наибольший общий делитель чисел 27 и 3 равен 3, следовательно, и наибольший общий делитель чисел 645 и 381 равен 3, т. е. последнему отличному от нуля остатку.

Таким образом, НОД (645; 381) = 3.

Вывод формул для решения диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида.

Докажем утверждение о том, что ***наибольший общий делитель двух чисел есть последний отличный от нуля остаток в цепочке указанных в примере действий***.

Чтобы доказать утверждение о наибольшем общем делителе, представим описанный процесс в виде следующей цепочки равенств: если $a>b$, то

$\cdot b = r1q1 + r2$

$r1 = r2q2 + r3$ (2)

. . . .

$r\,n– 1 = r\,n\,q\,n$

Здесь $r1, . . . , r\ n$ - положительные остатки, убывающие с возрастанием номера. Отсутствие остатка в последнем равенстве следует из того, что натуральные числа r_n не могут убывать бесконечно, поэтому на некотором шаге остаток станет нулевым.

Обратимся к системе (2). Из первого равенства, выразив остаток r_1 через a и b, получим $r_1 = a – b\cdot q0$. Подставляя его во второе равенство, найдём $r_2 = b(1 + q0q1) – a\cdot q_1$. Продолжая этот процесс дальше, мы сможем выразить все остатки через a и b, в том числе и последний: $r_n = Aa + Bb$. В результате нами доказано

что найдутся такие целые числа A и B, что $d = Aa + Bb$. Заметим, что коэффициенты A и B имеют разные знаки; если $НОД\ (a,b) = 1$, то $Aa + Bb = 1$. Как найти числа A и B, видно из алгоритма Евклида.

Решение линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$ax + by = c \qquad (1)$$

Возможны два случая: либо число c делится на $d = НОД(a,b)$, либо нет.

В первом случае можно разделить обе части уравнения на d и свести задачу к решению в целых числах уравнения $a_1x + b_1y = c_1$, коэффициенты которого

$a_1 =-$ и $b_1 =-$ взаимно просты.

Во втором случае уравнение не имеет целочисленных решений: при любых целых x и y число $ax + by$ делиться на d и поэтому не может равняться числу c, которое на d не делится.

Итак, мы можем ограничиться случаем, когда в уравнении (1) коэффициенты a и b взаимно просты. На основании предыдущего предложения найдутся такие целые числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = 1$, откуда пара (cx_0, cy_0) удовлетворяет уравнению (1). Вместе с ней уравнению (1) удовлетворяет бесконечное множество пар (x, y) целых чисел, которые можно найти по формулам

$$x = cx_0 + bt, \qquad y = cy_0 - at. \qquad (3)$$

Здесь t – любое целое число. Нетрудно показать, что других целочисленных решений уравнение $ax + by = c$ не имеет. Решение, записанное в виде (3), называется общим решением уравнения (1). Подставив вместо t конкретное целое число, получим его частное решение.

Задача . Для газификации жилого дома требуется проложить газопровод протяженностью 150 м. Имеются трубы 13 м и 9м длиной. Сколько требуется труб, чтобы не приходилось их разрезать при прокладке газопровода.

Решение. Пусть требуется *x труб по 9 м, и y труб по 13м.* Составим и решим уравнение: $9x+13y=150$.

НОД(9;13)=1, уравнение разрешимо во множестве целых чисел.

Найдем значение x_0 и y_0 для получения решений уравнения по формулам (3). Применим алгоритм Евклида к числам 13 и 9:

$$\left.\begin{array}{l} 13 = 9\cdot 1 + 4, \\ 9 = 4\cdot 2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 9 - 4\cdot 2 = 9 - (13 - 9\cdot 1)\cdot 2 = 9 - 13\cdot 2 + 9\cdot 2 = 9\cdot 3 + 13\cdot(-2) \Rightarrow x_0 = 3,\ y_0 = -2$$

Запишем общее решение уравнения согласно формулам (3).

$$\begin{cases} x = 150\cdot 3 + 13t, \\ y = 150\cdot(-2) - 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 + 13t, \\ y = -300 - 9t \end{cases}$$

Так как *x* и *y* неотрицательные целые числа, то чтобы найти значение *t,* решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 13t + 450 \geq 0. \\ -9t - 300 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13t \geq -450, \\ -9t \geq 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -34,6, \\ t \leq -33,3 \end{cases} \Rightarrow t = -34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 13\cdot(-34) + 450 = 8, \\ y = -9\cdot(-34) - 300 = 6 \end{cases}$$

Ответ. Для прокладывания газопровода потребуется 8 труб длиной по 9м и 6 труб длиной по 13м.

Решение диофантовых уравнений с использованием цепной дроби.

Понятие цепной дроби. Представление рациональных чисел в виде цепной дроби

Обратимся вновь к алгоритму Евклида. Из первого равенства системы (2) вытекает, что дробь *a/b* можно записать в виде суммы целой части и правильной дроби: $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$. Из второго равенства той же системы имеем

$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$. Значит, $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не придём к знаменателю q_n

В результате мы представим обыкновенную дробь a/b в следующем виде: $\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}}$. Эйлер назвал дробь, стоящую в правой части равенства *непрерывной*. Приблизительно в тоже время в Германии появился другой термин – *цепная дробь*. Так за этими дробями и сохранились оба названия. Ввиду громоздкости развёрнутой записи цепной дроби применяют компактную запись

$$a/b = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

Пример 1.

Представить рациональное число $\frac{44}{13}$ в виде цепной дроби.

Решение. $\frac{44}{13} = 3 + \frac{5}{13} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{5}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [3;2,1,1,2].$

Очевидно, что любое рациональное число, и только оно записывается в виде конечной цепной дроби. Иррациональным числам соответствуют бесконечные цепные дроби.

Если при построении цепной дроби остановиться на знаменателе q_k, то получиться дробь $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$, которую называют *к-й подходящей дробью* для искомой и обозначают $\frac{P_k}{Q_k}$. Найдем вид некоторых подходящих дробей:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}; \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}; \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{q_2(q_0 q_1 + 1) + q_0}{q_2 q_1 + 1} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0}.$$

Для рационального числа a / b последовательность подходящих дробей конечна, и ее последний элемент $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$. Нетрудно заметить, что имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= q_{k+1} P_k + P_{k-1}; \\ Q_{k+1} &= q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Формулы для решения диофантовых уравнений с использованием цепной дроби

Вернемся к уравнению: $ax + by = c$ (1). Напомним, что в нем a и b взаимно просты. Решение этого уравнения «способом цепной дроби» завершается применением готовых формул *(доказательство которых можно найти в специальных пособиях),* представляющих общее решение данного уравнения

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1} \cdot c \cdot Q_{n-1} + bt, \\ y = (-1)^{n} \cdot c \cdot P_{n-1} - at, \\ t = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases} \qquad (5)$$

Решим этим способом диофантово уравнение.

Пример 2.

Решить уравнение *44x+13y=5.*

Решение. Так как $\frac{44}{13} = [3;2,1,1,2]$, то $n=4$. Составим «подходящие дроби»

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1} = 3; \quad \frac{P_1}{Q_1} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3};$$

Найдем P_3 и Q_3 используя формулы (4): $P_3=10+7=17$, $Q_3=3+2=5$.

Все готово к применению формул (5). Общее решение уравнения будет иметь вид: $x=-25+13t$, $y=85-44t$, где t – целое число.

Алгоритм решения диофантова уравнения с использованием цепной дроби.

Для решения уравнения $ax + by = c$ (1), где *a, b, c – целые коэффициенты,* способом «цепной дроби» нужно:

1. Представить дробь *a/b* в виде конечной цепной дроби;
2. Записать дробь *a/b*= $(q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n)$;
3. Составить таблицу для нахождения значений числителя и знаменателя подходящих дробей $\frac{P_k}{Q_k}$ для полученной цепной дроби, последняя подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$

	Начальные условия	q_0	q_1	q_2	…	q_n
P_i	*1*	q_0	$q_0 q_1+1$	$(q_0 q_1+1) q_2+ q_0$		a
Q_i	*0*	*1*	q_1	$q_2 q_1+1$		b

4. Найдем решение уравнения по следующим формулам

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1} \cdot c \cdot Q_{n-1} + bt, \\ y = (-1)^{n} \cdot c \cdot P_{n-1} - at, \\ t = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \ldots \end{cases}$$

Решим задачу 2 приложения способом цепной дроби. Для ответа на вопрос задачи требуется решить диофантово уравнение: *9x+13y=150*

Решение.

1. *Представим дробь 9/13 в виде конечной цепной дроби.*

$$\frac{9}{13} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

2. *Запишем дробь в виде цепной дроби 9/13=[0;1,2,4]*

3. *Составим таблицу*

	Начальные условия	$q_0=0$	$q_1=1$	$q_2=2$	$q_3=4$
P_i	*1*	*0*	*1*	*2*	*9*
Q_i	*0*	*1*	*1*	*3*	*13*

4. *Запишем общее решение уравнения:*

$$\begin{cases} x = (-1)^2 \cdot 150 \cdot 3 + 13t, \\ y = (-1)^3 \cdot 150 \cdot 2 - 9t, \\ t = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 + 13t, \\ y = -300 - 9t \end{cases}$$

Как и в решении способом с использованием алгоритма Евклида, мы получили такой же вид общего решения. А решение задачи выражается той же парой чисел: (8;6).

Метод рассеивания (измельчения) в решении диофантовых уравнений.

Метод заключается в сведении данного уравнения к последовательности других уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестными.

Задача. Найти два числа, если разность произведений первого на 19 и второго на 8 равна 13.

Решение. Требуется решить уравнение $19x — 8y = 13$

Перепишем его иначе: $8y=19x–13$; $8y=16x+3x–13$; $y = 2x + \frac{3x-13}{8}$

и обозначим $y_1 = y — 2x$.

В результате уравнение примет вид $8y_1 = 3x - 13$ или $x = 2y_1 + \frac{2y_1 + 13}{3}$.

Если вновь произвести замену $x_1 = x - 2y_1$, то придем к уравнению

$3x_l - 2y_1 = 13$.

Заметим, что коэффициенты при неизвестных уменьшились — измельчились.

Продолжим дальнейшее их уменьшение: так как $y_1 = x_l + \frac{x_1 - 13}{2}$, то положим

$y_2 = y_1 - x_1$.

В результате последнее уравнение преобразуется к виду $x_1 - 2y_2 = 13$. Здесь коэффициент при x_1, равен 1, а поэтому при любом целом $y_2 = t$ число x_1 тоже целое.

Остается выразить исходные переменные через *t:*

вначале выразим $x_1 = 2t + 13$, $y_1 = 3t + 13$; *а затем* $x = 8t + 39$, $y = 19t + 91$.

Итак, получаем бесконечную последовательность ($39 + 8t$, $91 + 19t$) целочисленных решений**.**

Нетрудно заметить, что методы цепных дробей и рассеивания являются лишь другой формой применения алгоритма Евклида.

Решение уравнений с двумя переменными при помощи программирования на языке программирования Паскаль.

Решим следующую старинную задачу из области экономики сельского хозяйства. Зажиточный крестьянин потратил 100 рублей на покупку 100 различных домашних животных. Каждая корова обошлась ему в 10 рублей, свинья в 3 рубля, а овца в 50 копеек. Предполагая, что крестьянин приобрел по крайней мере по одному животному каждого вида, найдем, сколько голов скота каждого вида он купил.

Пусть x, y, z — количество коров, свиней и овец соответственно. Получаем уравнение 19x + 5y = 100. Решениями данного уравнения должны быть целые положительные числа (видел ли кто-нибудь отрицательное число коров?), меньшие 100. Следующая программа предназначена для решения данного уравнения.

Листинг «. Решение линейного диофантова уравнения»

```
program diophantine_equation_l;
var
   x, y: Integer;
begin
   WriteLn('Целые решения уравнения 19x + 5y = 100 из диапазона');
   WriteLn('l <= x <= 100, 1 <= y <= 100: ');
   for x := 1 to 100 do
      for y := 1 to 100 do
         if 19*x + 5*y = 100 then
            WriteLn('(x, y) = (', x, ', ', y, ')');
   Write('Нажмите <Enter>');
   ReadLn;
end.
```

Здесь имеется двойной вложенный цикл **for**. Внутренний цикл содержит условный оператор if... then.... Оператор **WriteLn** выполняется только в том случае, когда истинно условие в операторе if. В данном случае это условие **19*x+5*y=100**. Обратим внимание на то, что знак равенства обозначает здесь не оператор присваивания, а логическое отношение равенства двух значений. Результатом такого сравнения может быть или True (истина), если условие выполнено, или **False** (ложь), если условие не выполнено. Оператор вывода WriteLn('(x, y) = (', x, ', ', y, ')'); используется для вывода на экран четырех элементов, которые разделяются запятыми. Последовательности символов, начинающиеся и заканчивающиеся одиночными кавычками ('), являются строками текста (строковыми константами). В нашем примере это '(x, y) = (', ', ' и ')'. На экран будет выведен тот набор символов, который находится между кавычками. Нетекстовыми элементами списка вывода являются идентификаторы переменных x и y. На экран будут выведены значения этих переменных.

Сборник задач, приводимых к решению диофантовых уравнений практической направленности.

1. Фирма продавала чай в центре города по 7 руб., а кофе по 10 руб. за
стакан; на вокзале — по 4 руб. и 9 руб. соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

2. Тема сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе 100 рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тема обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Темы?

3. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы

а) встретятся в пункте B;

б) окажутся в одном месте строго между пунктами *A и* B,

если известно, что первый стартует из пункта *A,* а второй — из пункта B?

4. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить

минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

5. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

6. Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причем каждый день изготовлялось одно и то же число деталей. Когда треть продукции одного дня была упакована в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причем число ящиков равно числу дней работы цеха. После отсылки половины всех деталей заказчикам выяснилось, что куб числа заказчиков был равен числу деталей, высланных каждому из заказчиков. Какое минимальное число деталей мог при этих условиях изготовить цех?

7. Баржа грузоподъемностью 96 т перевозит контейнеры типов *А и В* при условии полной загрузки. Количество погруженных на баржу контейнеров типа *В* не менее чем на 25% превосходит количество погруженных контейнеров типа *А*. Вес и стоимость одного контейнера типа *А* составляют 3 т и 5 тыс. руб., контейнера типа *В* — 4 т и 2 тыс. руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

8. Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисицы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

9. Детский сад хочет приобрести наборы цветных карандашей трех видов на сумму 111 руб., при этом должны быть куплены наборы всех трех видов и истрачена вся сумма. Набор из 2 карандашей стоит 2 руб., набор из 16 карандашей — 14 руб., набор из 23 карандашей — 21 руб. Сколько наборов каждого вида следует купить, чтобы общее количество купленных было наибольшим при заданных условиях?

10. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа – 20 руб., стоимость пересылки одного ящика второго типа – 10 руб., стоимость пересылки одного ящика третьего типа – 7 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

11. Из двух рублевых и пятирублевых монет составлена сумма в 23 рубля. Сколько среди этих монет двухрублевых?

12. Для газификации жилого дома требуется проложить газопровод длиной 150 м. Имеются трубы 13 м и 9 м длиной. Сколько требуется труб, чтобы не приходилось их разрезать при прокладке газопровода?

13. Туристическое бюро организует поездки на автомашинах двух типов: 23-х местных автобусах и 6-ти местных автомобилях. Группа туристов состоит из 310 человек. Сколько машин того и другого типа следует выделить, чтобы не осталось свободных мест в салоне?

14. Транспортные организации имеют в наличие машины вместимостью 3,5 т и 4,5 т. Следует перевезти груз весом 53 т. Сколько машин нужно взять для одного рейса?

15. На 6200 рублей школой было закуплено некоторое количество шахмат и шашек, стоимостью соответственно 460 и 190 рублей. Сколько комплектов шахмат и шашек можно купить, чтобы рационально использовать эти деньги?

16. Школа получила 1 млн. руб. на приобретение 100 единиц учебного оборудования (на всю сумму без остатка). Администрации школы предложили, оборудование стоимостью 3000, 8000 и 12000 руб. за единицу. Сколькими способами школа может закупить это оборудование? Укажите один из способов.

17. Надо разлить 15 л жидкости в бутыли емкостью в 0,5 л и 0,8 л так, чтобы все использованные бутыли были полными. Сколько потребуется бутылей той и другой емкости?

18. Сколько можно купить на *100* монет петухов, кур и цыплят, если всего надо купить *100* птиц, причём петух стоит *5* монет, курица – *4*, а *4* цыплёнка – одну монету?

19. Крестьянка несла на базар корзину яиц. Неосторожный всадник, обгоняя женщину, задел корзину, и все яйца разбились. Желая возместить ущерб, он спросил у крестьянки, сколько яиц было в корзине. Она ответила, что число яиц не знает, но когда она раскладывала их по *2*, по *3*, по *4*, по *5* и по *6*, то каждый раз одно яйцо оставалось лишним, а когда она разложила по *7*, лишних яиц не осталось. Сколько яиц несла крестьянка на базар?

20. Продажа кур (старинная задача).

Три сестры пошли на рынок с курами. Одна принесла для продажи 10 кур, другая – 16, третья – 26. До полудня они продали часть своих кур по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все куры будут проданы, они понизили цену и распродали оставшихся кур снова по одинаковой цене. Домой все трое вернулись с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 рублей. По какой цене они продавали кур до и после полудня?

21. ***После кораблекрушения.***

Пять моряков высадились на остров и к вечеру собрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, пересчитал добычу, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно 1/5 часть, после чего вновь лег спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях своих предшественников. Наутро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Сколько орехов собрали моряки?

22. Некто купил 30 птиц за 30 монет, уплатив за каждые 3 воробья по одной монете, за каждые 2 горлицы – тоже по 1 монете, за каждого голубя – по 2. Сколько куплено птиц каждого вида?

23. Евгений работает летом в кафе «Баскин Робинс». За каждый час ему платят 10 р. и высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. Он хотел бы заработать 180 р. Определите, сколько часов он должен отработать и сколько может разбить тарелок, если известно, что он может работать не более 3 ч в день.

24. Надо разлить 1500 т. нефти в цистерны емкостью в 50 т. и 80 т. так, чтобы все использованные цистерны были полными. Сколько цистерн той или другой емкости потребуется?

<u>Прочие задачи:</u>

1. Представить рациональное число $\frac{44}{13}$ в виде цепной дроби.
2. Решить уравнение $44x+13y=5$.
3. Найти два числа, если разность произведений первого на 19 и второго на 8 равна 13.
4. Шехерезада рассказывает свои сказки великому правителю. Всего она должна рассказать 1001 сказку. Сколько ночей потребуется Шехерезаде, чтобы рассказать все свои сказки, если x ночей она будет рассказывать по 3 сказки, а остальные сказки по 5 за y ночей *(Сюжет был предложен Б. А. Кордемским в статье «Этому виду задач более 1600 лет» в журнале «Квант» [13]).*
5. Решить уравнение на множестве целых чисел $7x+11y=69$

6. Решить способом измельчения в целых числах уравнение $5x + 8y = 39$.
7. Решить в целых числах $29x + 13y + 56z = 17$
8. Решите в натуральных числах $x^2 - 4 \cdot x \cdot y - 5y^2 = 1996$.
9. (из «Арифметики» Диофанта) Для числа $13 = 2^2 + 3^2$ найти два других, сумма квадратов которых равна 13.
10. (из древнего китайского сборника) Найти число, которое при делении на 3 даёт остаток 2 , при делении на 5 – остаток 3, а при делении на 7 – остаток 2.
11. (из «Арифметики» Диофанта). Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.

Решения задач.

1. *Решение.* Пусть n *и m* соответственно – количество стаканов чая и кофе, проданных в центре города. Тогда количество стаканов чая и кофе, проданных на вокзале, будет равно 20 - n и 20 - m соответственно. По смыслу задачи переменные — неотрицательные целые числа, не превосходящие 20: n, m = 0,1,..., 20. '

Общая выручка в центре равна $7n$ + 10 m руб., а на вокзале равна 4(20 - n) + 9(20 - m) руб. По условию задачи эти величины равны:

$7n + 10m = 4(20 - n) + 9(20 - m) \Leftrightarrow 11n + 10m = 260$

Решим уравнение 11 n + 19m = 260:

1. Найдем частное решение; им будет, например, $n_0 = 15$, $m_0=5$.
2. Вычитая из равенства 11 n + 19m = 260 равенство 11 • 15 +19 • 6 = =260, мы получим однородное уравнение: 11(n -15) =19(5 - m).

3. Общее решение этого однородного уравнения в целых числах имеет вид:

n-15=19k, 5-m=11k, где k *Z.* Соответственно, общее решение исходного уравнения в целых числах имеет вид: n = 15 + 19k, m = 5-11k, где k *Z.*

Поскольку $n, m \geq 0$, параметр k может быть равен только нулю. Поэтому найденное частное решение будет единственным решением исходного уравнения в неотрицательных целых числах: n = 15, m = 5. Так как это решение, кроме того, удовлетворяет условию n, m < 20, найденное значение m = 5 и будет ответом задачи. ,

Ответ: 5 стаканов.

2. *Решение.* Пусть правильная сдача равна n руб. и m коп., то есть (100п + m) коп. Реально кассирша выплатила сумму m руб. и n коп., то есть (100m + n) коп. После покупки пипеток у Темы останется (100 m + n - 140) коп. По условию эта сумма в три раза больше, чем

100n+m. Это дает следующее уравнение для неизвестных *n и m:*

$100m + n - 140 = 3 \cdot (100n + m) \Leftrightarrow 97m - 299n = 140.$

Поскольку число копеек не может быть больше, чем 99, справедливо двойное неравенство: $1 \leq n, m \leq 99$. Оно, в частности, влечет, что сдача не превышает первоначальную сумму в 100 рублей, которая была у Темы.

Рассмотрим коэффициенты при неизвестных (а = 97 и *Ь* = 299) и разделим больший коэффициент на меньший. В результате получим неполное частное 3 и остаток 8. Иначе говоря, справедливо равенство 299 = 3•97 + 8, или, что то же самое, 8 = 299 -3•97.

Теперь заменим больший коэффициент (то есть 299) на остаток (то есть 8) и проделаем с парой 97, 8 ту же процедуру: разделим 97 на 8. В результате мы получим неполное частное 12 и остаток 1. Иначе говоря, справедливо равенство 97 = 12 • 8 + 1, или, что то же самое, 1 = 97-12•8. Заменим в этом равенстве число 8 выражением 299 - 3 • 97, найденным в предыдущем абзаце:

$1 = 97 - 12 \cdot (299 - 3 \cdot 97) = 37 \cdot 97 - 12 \cdot 299.$

Итак, мы представили число 1 (это наибольший общий делитель чисел 97 и 299) в виде линейной комбинации чисел 97 и 299. Умножая последнее равенство на 140, мы получим искомое частное решение уравнения : $m_0 = 37 \cdot 140 = 5180$, $n_0 = 12 \cdot 140 = 1680$.

Это частное решение обычным образом приводит к следующему общему решению уравнения (8) в целых числах:

$$\begin{cases} n = 1680 + 97k, \\ m = 5180 + 299k, \ \kappa \quad Z. \end{cases}$$

Условия $1 \le n, m \le 99$ однозначно определяют значение параметра k: $k = -17$, что приводит к следующим значениям основных неизвестных n и m: $n = 31$, $m = 97$.

Поэтому стоимость всех покупок Темы (в рублях) равна

100-31,97+1,40 = 69,43.

Ответ: 69 руб. 43 коп.

3. Примем момент старта автобусов в качестве начального

и обозначим через t'_n, t''_n моменты времени, когда первый и второй автобусы в n-й раз окажутся в пункте B.

Поскольку первый автобус стартует из пункта *A,* к моменту n-го

визита в B он пройдет путь $s'_n = 2 + 4(n-1) = 4n-2$ (Последовательность s'_n образует арифметическую прогрессию с разностью).

Поэтому t'_n= ——

Второй автобус к моменту n-визита в пункт B пройдет путь $s'_n = 4(n-1) = 4n-4$ (последовательность s'_n также будет арифметической прогрессией с разностью).

Поэтому t''_n= ——

Встреча автобусов в пункте B означает, что для некоторых натуральных n и m верно равенство $t'_n = t''_m \Leftrightarrow 14n-17m=-10$

Рассмотрим его как уравнение относительно n и m и решим его.

В качестве частного решения можно взять, например, $n_0 = 9$, $m_0=8$:

$$14 \cdot 9 - 17 \cdot 8 = -10.$$

Вычитая это равенство из уравнения $14n-17m=-10$, мы получим однородное уравнение: $14(n - 9) = 17(m - 8)$.

Его общее решение в целых числах имеет вид: $n - 9 = 17k$, $m - 8 = 14k$, где $к$ Z. Отсюда $п = 9 + 17k$, $m = 8 + 14k$. Поскольку нас интересует решение в натуральных числах, возможные значения целочисленного параметра k должны быть неотрицательными: к Z_+. Переменную k можно интерпретировать как номер встречи автобусов в пункте В (имея в виду, что встречи нумеруются не с 1, а с 0). Момент

k-й встречи можно подсчитать как t'_n при $n = 9 + 17k$: t_k=——

Число встреч за 8 часов равно числу решений неравенства t_k 8 на множестве k⇔ $Z_=$ ⇔ — k=0;1;…..;5,

11. Решение.

Пусть x – количество двухрублевых монет, y – количество пятирублевых монет. Составим и решим уравнение: *2x+5y=23; 2x=23–5y; x = (23 – 5y):2; x =(22+1 – 5y):2, почленно поделим 22 на 2 и (1 – 5y) на 2, получим: x = 11 + (1 – 5y):2.*

Так как x и y натуральные числа по условию задачи, то левая часть уравнения есть натуральное число, значит, и правая часть должна быть натуральным числом. К тому же, чтобы получить в правой части число натуральное, нужно чтобы выражение (1 – 5y) нацело делилось на 2. Осуществим перебор вариантов.

1) *y=1, x=9, то есть двухрублевых монет может быть 9;*
2) *y=2, при этом выражение (1 – 5y) не делится нацело на 2;*
3) *y=3, x=4, то есть двухрублевых монет может быть 4;*
4) *при y больше или равном 4 значение x не является числом натуральным.*

Таким образом, ответ в задаче следующий: **среди монет 9 или 4 двухрублевых.**

12. *Решение*. Пусть требуется *x* *труб по 9 м, и y труб по 13м.* Составим и решим уравнение: *9x+13y=150.*

НОД(9;13)=1, уравнение разрешимо во множестве целых чисел.

Найдем значение x_0 и y_0 для получения решений уравнения по формулам (3). Применим алгоритм Евклида к числам 13 и 9:

$$\left.\begin{matrix} 13 = 9\cdot 1 + 4, \\ 9 = 4\cdot 2 + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 = 9 - 4\cdot 2 = 9 - (13 - 9\cdot 1)\cdot 2 = 9 - 13\cdot 2 + 9\cdot 2 = 9\cdot 3 + 13\cdot(-2) \Rightarrow x_0 = 3, y_0 = -2$$

Запишем общее решение уравнения согласно формулам (3).

$$\begin{cases} x = 150\cdot 3 + 13t, \\ y = 150\cdot(-2) - 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 + 13t, \\ y = -300 - 9t \end{cases}$$

Так как *x* и *y* неотрицательные целые числа, то чтобы найти значение *t*, решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 13t + 450 \geq 0. \\ -9t - 300 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13t \geq -450, \\ -9t \geq 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -34{,}6, \\ t \leq -33{,}3 \end{cases} \Rightarrow t = -34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 13\cdot(-34) + 450 = 8, \\ y = -9\cdot(-34) - 300 = 6 \end{cases}$$

Ответ. Для прокладывания газопровода потребуется 8 труб длиной по 9м и 6 труб длиной по 13м.

2 способ. При помощи цепной дроби. Для ответа на вопрос задачи требуется решить диофантово уравнение: *9x+13y=150*

Решение.

1. *Представим дробь 9/13 в виде конечной цепной дроби.*

$$\frac{9}{13} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

2. *Запишем дробь в виде цепной дроби 9/13=[0;1,2,4]*

3. *Составим таблицу*

	Начальные условия	$q_0=0$	$q_1=1$	$q_2=2$	$q_3=4$
P_i	*1*	*0*	*1*	*2*	*9*
Q_i	*0*	*1*	*1*	*3*	*13*

4. Запишем общее решение уравнения:

$$\begin{cases} x = (-1)^2 \cdot 150 \cdot 3 + 13t, \\ y = (-1)^3 \cdot 150 \cdot 2 - 9t, \\ t = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 + 13t, \\ y = -300 - 9t \end{cases}$$

Как и в решении способом с использованием алгоритма Евклида, мы получили такой же вид общего решения. А решение задачи выражается той же парой чисел: (8;6).

14. Решение.

Пусть х машин по 3,5 т.; у машин по 4, 5 т. Составим и решим уравнение: 3,5x+4,5y=53. Перейдем к уравнению с целыми коэффициентами, например, умножим обе части уравнения на 2. Получим: 7x+9y=106.

НОД(7, 9)=1, уравнение имеет целые решения.

$$\begin{cases} 9 = 7 \cdot 1 + 2, \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 = 7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3) \Rightarrow x_0 = 4; y_0 = -3$$

$$\begin{cases} x = 106 \cdot 4 + 9t, \\ y = 106 \cdot (-3) - 7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 424 + 9t, \\ y = -318 - 7t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9t + 424 \geq 0, \\ -7t - 318 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{424}{3} \approx -47,1; \\ t \leq -\dfrac{318}{7} \approx -45,8 \end{cases}$$

Так как t *– принимает целые значения, то системе неравенств удовлетворяют значения* t=-47 *и* t=-46. *Получим решение диофантова уравнения в натуральных числах:*

$$\begin{cases} x = 424 + 9 \cdot (-47) = 1, \\ y = -318 - 7 \cdot (-47) = 11 \end{cases}; \quad \textit{решение} \quad (1;11)$$

$$\begin{cases} x = 424 + 9 \cdot (-46) = 10, \\ y = -318 - 7 \cdot (-46) = 4 \end{cases}; \quad \textit{решение} \quad (10;4)$$

Таким образом, для одного рейса можно взять:

А) 1 машину вместимостью 3,5 т и 11 машин вместимостью 4,5 т;

В) 10 машин вместимостью 3,5 т и 4 машины вместимостью 4,5 т.

Полезно обратить внимание на то, какой из возможных вариантов будет наиболее эффективным для работы предприятия с экономической точки зрения *(экономия бензина, экономия средств на оплату труда водителям и т.д.)*.

16. Решение.

Необходимо выяснить: что дано, что неизвестно в условии, как связаны между собой данные и искомые. Затем переходить к составлению математической модели задачи.

1*) составление системы уравнений*.

Пусть приобретено x единиц оборудования по 12000 руб., y единиц оборудования по 8000 руб., z единиц оборудования по 3000 руб.

Всего приобретено 100 единиц оборудования, т.е. $x+ y + z = 100$, причем на приобретение 100 единиц оборудования затрачено 1 млн. руб., т.е.

$12000\,x + 8000\,y + 3000\,z = 1\,000\,000,$

$12x + 8y + 3z = 1000.$

Таким образом, получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 12x + 8y + 3z = 1000 \end{cases}$$

Вопрос: *всегда ли задача будет иметь решение?* Иначе: какими должны быть x, y, z ?

(ответ: $x>0, y>0, z>0$)

Во-первых, исключим z, путем вычитания из второго уравнения первого, умноженного на 3. Следовательно, получаем диофантово уравнение 1-ой степени с двумя неизвестными $9x+ 5y = 700$.

Во-вторых, его можно решить способом с использованием алгоритма Евклида.

3) *оформление решения задачи.*

В результате решения получается, что приобрести оборудование библиотека может шестью способами. Укажем одно из частных решений задачи: $x=65$, $y=23$, $z=12$, т.е. школа на 1 млн. руб. может приобрести 65 единиц оборудования по 12 тыс. руб., 23 единицы оборудования по 8 тыс. руб., 12 единиц оборудования по 3 тыс. руб.

18. *Решение.*

Пусть x – искомое число петухов, y – кур, а $4z$ – цыплят. Составим систему уравнений, которую надо решить в целых неотрицательных числах.

$$\begin{cases} x + y + 4z = 100, \\ 5x + 4y + z = 100. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на 4, а второе – на (-1) и, сложив результаты, придём к уравнению $-x + 15z = 300$ с целочисленными решениями $x = -300 + 15t$, $z = t$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получим $y = 400 - 19t$. Значит, целочисленные решения системы имеют вид

$$x = -300 + 15t,\ y = 400 - 19t,\ z = t.$$

Из условия задачи вытекает, что

$$\begin{cases} -300 + 15t \geq 0, \\ 400 - 19t \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases}$$ откуда $20 \leq t \leq 21\frac{1}{19}$, т. е. $t = 20$ или $t = 21$.

*Ответ***.** На *100* монет можно купить *20* кур и *80* цыплят, или *15* петухов, *1* курицу и *84* цыплёнка.

19. *Решение***.**

Пусть x – число яиц. Так как $(x – 1)$ делится на *2*, на *3*, на *4*, на *5*, на *6*, то оно делится на их НОК, равное *60*. Значит, x имеет вид $60y + 1$.

Поэтому для ответа на вопрос задачи надо решить в натуральных числах уравнение $60y + 1 = 7z$, или $7z – 60y=1$.

С помощью способа с использованием цепной дроби получаем, что целочисленные решения уравнения имеют вид $y = -2 + 7t$, $z = -17 + 60t$, где t – любое целое число.

Наименьшее положительное решение получаем при $t = 1$. В этом случае $y = 5$, $z = 43$. Итак, крестьянка несла на базар *301* яйцо.

Ответ. Крестьянка несла на базар *301* яйцо.

21. *Решение.*

Обозначим искомое число орехов через x. Выражая последовательные действия моряков уравнениями, получаем $x=5a + 1$; $4a = 5b + 1$; $4b = 5c + 1$;

$4c = 5d + 1$; $4d = 25y + 1$ *(обдумайте смысл предлагаемых уравнений).*

Эта система сводится к одному неопределенному уравнению

$256x = 2101 + 15625y$.

Быстрое решение в целых числах этого громоздкого уравнения будет приятной наградой за терпеливое ознакомление с предложенными четырьмя способами – можно выбрать из них наиболее эффективный для данной задачи. Ответ в этой задаче таков: $x = 3121$ – наименьшее из возможных натуральных значений x.

Замечание. *В книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения», в которой есть эта задача, написано, что она «принадлежит к числу наиболее часто решаемых, но наименее поддающихся решению, диофантовых головоломок». Когда эта задача в 1926 году появилась в одной газете (без решения и ответа), то 20 лет после этого не прекращался поток писем в газету либо с просьбой сообщить ответ, либо с вариантами собственных решений.*

23. Пусть x часов он всего работал в неделю, тогда $10x$ р. ему заплатили, но он разбил y тарелок, и с него вычли $2y$ р. Имеем уравнение $10x – 2y =180$, причем x меньше или равен 21. Получим: $5x-y=90$, $5x=90+y$, $x=18+-$.

Так как x целое число, то y должно нацело делится на 5, чтобы в правой части получилось целое число. Возможны четыре случаи:

5) *$y=0$, $x=18$, т. е. решением является пара – (18, 0);*
6) *$y=5$, $x=19$, (19, 5);*
7) *$y=10$, $x=20$, (20, 10);*

8) y=15, x=21, (21, 15).

Прочие задачи:

1. **<u>Решение.</u>** $\frac{44}{13}=3+\frac{5}{13}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=[3;2,1,1,2]$.

2. **<u>Решение</u>**. Так как $\frac{44}{13}=[3;2,1,1,2]$, то $n=4$. Составим «подходящие дроби» $\frac{P_0}{Q_0}=\frac{3}{1}=3$; $\frac{P_1}{Q_1}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$; $\frac{P_2}{Q_2}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$;

Найдем P_3 и Q_3 используя формулы (4): $P_3=10+7=17$, $Q_3=3+2=5$.

Все готово к применению формул (5). Общее решение уравнения будет иметь вид: $x=-25+13t$, $y=85-44t$, где t – целое число.

3. **<u>Решение.</u>** Требуется решить уравнение $19x — 8y = 13$

Перепишем его иначе: $8y=19x–13$; $8y=16x+3x–13$; $y = 2x + \frac{3x-13}{8}$

и обозначим $y_1 = y — 2x$.

В результате уравнение примет вид $8y_1 = 3x — 13$ или $x= 2y_1 + \frac{2y_1+13}{3}$.

Если вновь произвести замену $x_1 = x — 2y_1$, то придем к уравнению $3x_l — 2y_1 = 13$.

Заметим, что коэффициенты при неизвестных уменьшились — измельчились. Продолжим дальнейшее их уменьшение: так как $y_1 = x_l + \frac{x_1-13}{2}$, то положим $y_2 =y_1 –x_1$.

В результате последнее уравнение преобразуется к виду $x_1 — 2y_2 = 13$.

Здесь коэффициент при x_1, равен 1, а поэтому при любом целом $y_2 = t$ число x_1 тоже целое.

Остается выразить исходные переменные через t:

вначале выразим $x_1=2t+13$, $y_1 = 3t+13$; *а затем* $x = 8t+39$, $y= 19t + 91$.

Итак, получаем бесконечную последовательность ($39 + 8t$, $91 + 19t$) целочисленных решений**.**

4. *Решение.*

Для решения задачи нужно решить диофантово уравнение $3x+5y=1001$, где x и y – натуральные корни.

Решим это уравнение **способом перебора вариантов.**

$x = (1001 - 5y):3$; так как x – натуральное число, то и в правой части равенства также должно быть натуральное число, а значит выражение ($1001 - 5y$) должно нацело делиться на 3.

Осуществим перебор вариантов.

$y=1$, $1001 - 5y=1001-5= 996$, 996 делится на 3, следовательно, $x=332$; решение (332;1);

$y=2$, $1001- 10=991$, 991 не делится на 3;

$y=3$, $1001 - 15 = 986$; 986 не делится на3;

$y =4$, $1001 - 20 = 981$, 981 делится на 3, следовательно, $x = 327$, решение (327;4) и т. д.

Замечание. В данной задаче решением является 67 пар возможных корней

Решим это уравнение различными способами.

С помощью алгоритма Евклида

НОД(3,5)=1, уравнение имеет целые решения.

$$\begin{cases}5=3\cdot 1+2,\\ 3=2\cdot 1+1\end{cases}\Rightarrow 1=3-2\cdot 1=3-(5-3\cdot 1)\cdot 1=3\cdot 2+5\cdot(-1)\Rightarrow x_0=2;\, y_0=-1$$

$$\begin{cases}x=1001\cdot 2+5t,\\ y=1001\cdot(-1)-3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2002+5t,\\ y=-1001-3t\end{cases}$$

$$\begin{cases}5t+2002\geq 0,\\ -3t-1001\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -\dfrac{2002}{5}=-400,4;\\ t\leq -\dfrac{1001}{3}\approx -333,7\end{cases}\Rightarrow t=-400;\ -399;\ -398;\ \ldots;\ -335;\ -334$$

Получаем, что всего 67 целых значений переменной *t* содержится в указанном промежутке.

Например, при *t= –335, получим*

y = -1001 +1005 =4; x =2002 – 1675 = 327, т. е. решение (327; 4).

Способ с использованием цепной дроби.

Обратимся к уравнению *3x + 5y = 1001*.

Решение.

1. *Представим дробь 3/5 в виде конечной цепной дроби.*

$$\frac{3}{5}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

2. *Запишем дробь в виде цепной дроби 3/5=[0;1, 1, 2]*

3. *Составим таблицу*

	Начальные условия	$q_0=0$	$q_1=1$	$q_2=1$	$q_3=2$
P_i	*1*	*0*	*1*	*1*	*3*

Q_i	*0*	*1*	*1*	*2*	*5*

4. Запишем общее решение уравнения:

$$\begin{cases} x = (-1)^2 \cdot 1001 \cdot 2 + 5t, \\ y = (-1)^3 \cdot 1001 \cdot 1 - 3t, \\ t = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2002 + 5t, \\ y = -1001 - 3t \end{cases}$$

Получили решение того же вида. С учетом условия, что корни уравнения натуральные, имеем те же значения для переменной *t*, что и в первом случае. Так, при $t = -334$ получается пара (332; 1).

Замечание. *Можно усложнить задачу дополнительными вопросами.*

1) *Если бы Шехерезада хотела бы распределить свою 1001 сказку между как можно большим числом ночей, то какой вариант она должна выбрать?*
2) *Какой вариант позволит Шехерезаде сократить свой срок работы до минимума?*

Требованию (1) удовлетворяет $max\ (x + y)$ – наибольшая из сумм пар корней уравнения. Имеем $x + y = 2002 + 5t - 1001 - 3t = 1001 + 2t$.

Очевидно, $max\ (x + y)$ достигается при $t = -334$. Итак, Шехерезада расскажет свои сказки самое большее за 333 ночи, если 332 ночи будет рассказывать по 3 сказки и только одну ночь – 5 сказок.

Ответу на второй вопрос соответствует вариант, когда $t = -400$, то есть решением уравнения будет пара (2; 199). Шехерезада будет рассказывать 2 ночи по 3 сказки и 199 ночей по 5 сказок, тем самым, сократив срок своей «работы» до 201 ночи.

Способ измельчения (рассеивания).

На занятии также можно рассмотреть решение данной задачи «методом измельчения». Обратимся к уравнению $3x + 5y = 1001$.

Перепишем его иначе: $x = -y + \frac{1001 - 2y}{3}$ и обозначим $x_l = y + x$

В результате уравнение примет вид $3x_1 = 1001 - 2y$ или

$y = -x_l + \frac{1001 - x_1}{2}$.

Если вновь произвести замену $y_1 = y + x_1$, то придем к уравнению

$x_1 + 2y_1 = 1001$. Заметим, что коэффициенты при неизвестных уменьшились — измельчились.

Здесь коэффициент при x_1, равен 1, а поэтому при любом целом $y_1 = t$ число x_1 тоже целое. Остается выразить исходные переменные через t:

$x_1 = 1001 - 2t$, следовательно, $y = -1001 + 3t$, а $x = 2002 - 5t$. Итак, получаем бесконечную последовательность ($2002 - 5t$, $-1001 + 3t$) целочисленных решений**.** Внешний вид формул для нахождения значений переменных отличается от решений, полученных ранее, но с учетом условия задачи, корни получаются те же самые. Так, пара (332;1) получается при t = =334.

5. ***Решение:*** *НОД(7;11)=1, Найдем значение x_0 и y_0 для получения решений уравнения по формулам (3). Применим алгоритм Евклида к числам 11 и 7:*

$$\left.\begin{array}{l} 11 = 7\cdot1 + 4, \\ 7 = 4\cdot1 + 3, \\ 4 = 3\cdot1 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 4 - 3\cdot1 = 4 - (7 - 4\cdot1)\cdot1 = 4\cdot2 - 7\cdot1 = (11 - 7\cdot1)\cdot2 - 7\cdot1 = 11\cdot2 - 7\cdot3$$

Таким образом, получаем: $7\cdot(-3) + 11\cdot2 = 1$, следовательно $x_0 = -3$, $y_0=2$

Запишем общее решение уравнения на множестве целых чисел согласно формулам (3):

$$\begin{cases} x = 69\cdot(-3) + 11t, \\ y = 69\cdot 2 - 7t \end{cases} ; \begin{cases} x = -207 + 11t, \\ y = 138 - 7t, t \in Z \end{cases}$$

Придавая конкретные целые значения *t,* можно получить частные решения уравнения. Например, при *t=1, имеем x= –196, y=131.*

6. ***Решение:***

Выберем неизвестное, имеющее наименьший коэффициент, и выразим его через другое неизвестное: *x = (39 – 8y):5*.

Выделим целую часть: *x = 7 –y + (4 – 3y):5*.

Все число будет целым, если целым окажется значение *(4 – 3y):5*.

Это возможно тогда, когда число (*4 – 3y)* без остатка делится на 5. Вводя дополнительную целочисленную переменную *z*, последнее уравнение запишем в виде: *4 –3 y = 5z.*

Мы пришли к уравнению такого же типа, как и исходное уравнение, но уже с меньшими коэффициентами. Решать его уже нужно относительно переменных *y и z*.

y= (4 – 5z):3 = 1- z + (1 – 2z):3

Аналогично рассуждая, запишем *(1-2z)* через новую целочисленную переменную *u: 1–2z=3u*

z = (1–3u):2=(1– u):2 – u;
1– u=2v

u=1 –2v - дробей больше нет, спуск закончен.

Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную *v* сначала *z*, потом *y* и затем *x.*

$z=(1-u):2-u=(1-1+2v):2-1+2v=3v-1,$

$\boldsymbol{z=3v-1}$.

$y=(4-5z):3=(4-5(3v-1)):3=3-5v,$

$\boldsymbol{y=3-5v}$.

$x=(39-8y):5=(39-8(3-5v)):5=3+8v,$

$\boldsymbol{x=3+8v}$.

Формулы $\boldsymbol{x=3+8v,\ y=3-5v}$ представляют общее решение исходного уравнения в целых числах.

Если необходимо получить только натуральные числа, то среди всех целых решений нужно выбрать такие, для которых $x>0$, $y>0$, то есть

$3+8v>0,$

$3-5v>0.$

Совместно эти неравенства могут выполняться лишь при $v=0$. В этом случае $x=3, y=3$.

Ответ: (3;3).

7. **Решение.** Выразим неизвестное, коэффициент при котором наименьший, через остальные неизвестные.

$$y=(17-29x-56z):13=(1-2x-4z)+(4-3x-4z):13 \qquad (2)$$

Обозначим $(4-3x-4z):13=t_1$ (3)

Из (2) следует, что t_1 может принимать только целые значения. Из (3) имеем $13t_1+3x+4z=4$ (4)

Получим новое диофантово уравнение, но с меньшими, чем в (1) коэффициентами. Применим к (4) те же соображения:

$$x=(4-13t_1-4z):3=(1-4t_1-z)+(1-t_1-z):3$$

$(1-t_1-z):3=t_2$, t_2 – целое, $3t_2+t_1+z=1$ (5)

В (5) коэффициент при z – неизвестном исходного уравнения равен 1 – это конечный пункт «спуска». Теперь последовательно выражаем z, x, y через t_1 и t_2.

$$\begin{cases} z = -t_1 - 3t_2 + 1, \\ x = 1 - 4t_1 + t_1 + 3t_2 - 1 + t_2 = -3t_1 + 4t_2, \\ y = 1 + 6t_1 - 8t_2 + 4t_1 + 12t_2 - 4 + t_1 = 11t1 + 4t_2 - 3 \end{cases}$$

Итак, $\begin{cases} x = -3t_1 + 4t_2, \\ y = 11t_1 + 4t_2 - 3, \\ z = -t_1 - 3t_2 + 1 \end{cases}$

t_1, t_2 – любые целые числа, определяющие все целые решения уравнения исходного уравнения.

Можно найти частные решения данного уравнения и проверить их.

Например, пусть $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. *Имеем*, $x=5$; $y=16$, $z= -6$.

Подставим найденные решения в уравнение $29x + 13y + 56z = 17$, *получим* $145+208 - 336 = 17$;

$$353 - 336 = 17;$$

$$17 = 17.$$

8. *Решение.*

Перепишем уравнение в виде $(x^2 - 4xy + 4y^2) - 9y^2 = 1996$, $(x-4y)^2 - 9y^2 = 1996$.

Разложим левую часть на множители $(x - 5y)(x + y) = 1996$.

Разложим число 1996 на целые множители:

$1996 = 1 \cdot 1996 = 2 \cdot 998 = 4 \cdot 499 = -1 \cdot (-1996) = -2 \cdot (-998) = -4 \cdot (-499)$.

Так как $x \in N$, $y \in N$, то $(x + y) \in N$, причём $(x + y) > 1$.

Если $(x + y) \in N$ и $(x + y)(x - 5y) = 1996$, то $(x - 5y) \in N$.

Тогда решение получившегося уравнения сводится к решению следующих систем:

1) $\begin{cases} x - 5y = 1, \\ x + y = 1996 \end{cases}$

решений в натуральных числах нет

2) $\begin{cases} x - 5y = 499, \\ x + y = 4 \end{cases}$ ***или*** $\begin{cases} x - 5y = 4, \\ x + y = 499 \end{cases}$

системы решений в натуральных числах не имеют

3) $\begin{cases} x - 5y = 2, \\ x + y = 998 \end{cases}$ ***или*** $\begin{cases} x - 5y = 998, \\ x + y = 2 \end{cases}$

(832; 166) решения в натуральных числах нет

Ответ: x = 832, y = 166.

9. <u>Решение.</u>

Приведём решение самого Диофанта. Он полагает первое число (обозначим его через *A*) равным *x+2*, а второе число *B* равным *2x–3*, указывая, что коэффициент перед *x* можно взять и другой.

Решая уравнение $(x + 2)^2 + (2x - 3)^2 = 13$, Диофант находит $x = 1{,}6$, откуда $A = 3{,}6$, $B = 0{,}2$.

Воспользуемся указанием Диофанта и возьмём произвольный коэффициент перед *x* в выражении для *B*. Пусть снова $A = x + 2$, а $B= kx - 3$, тогда из уравнения $(x + 2)^2 + (kx - 3)^2 = 13$ получаем $x=2(3k-2):(k^2 + 1)$. Отсюда $A=2(k^2+3k-1):(k^2+1)$, $B=(3k^2-4k-3):(k^2+1)$.

Теперь становятся понятными рассуждения Диофанта. Он вводит очень удобную подстановку *A=x+2, B=2x–3*, которая с учётом условия $2^2+3^2=13$ позволяет понизить степень квадратного уравнения. Можно было бы с тем же успехом в качестве *B* взять *(2x+3)* или ещё проще *(x ± 3)*, но тогда получаются отрицательные значения для *B*, чего Диофант не допускал. Очевидно *k = 2* – наименьшее натуральное число, при котором *A* и *B* положительны. И хотя Диофант приводит решение задачи в конкретных числах, чувствуется, что он владеет общим методом.

10.*<u>Решение.</u>*

Рассмотрим решение этой задачи китайским математиком Сунь-цзы (III или IV вв.): «При делении на *3* остаток есть *2*. Поэтому возьмём *140*. При делении на *5* остаток есть *3*, поэтому возьмём *63*. При делении на *7* остаток есть *2*, поэтому возьмём *30*. Сложив их вместе, получим *233*. Из этого вычтем *210* и получим ответ».

Разберём решение Сунь-цзы. Сначала он подбирает число *140*, кратное *5* и *7*, которое при делении на *3* даёт остаток *2*. Конечно, это не наименьшее натуральное число с такими свойствами: можно было бы взять число *35*. Но это не столь важно для решения задачи. Затем берётся число *63*, кратное *3* и *7*, дающее при делении на *5* остаток *3*. Аналогично находится число *30*. Очевидно, для числа $233 = 140 + 63 + 30$ выполняются все условия задачи, а потому они выполняются для числа вида $n = 105l + 233$. В свою очередь $233 = 2 \cdot 105 + 23$, поэтому все натуральные решения можно записать формулой $n = 105k + 23$, где $k = 0, 1, \ldots$.

При $k = 0$ из неё получаем наименьшее натуральное решение, равное *23*.

11. *Решение.*

Рассмотрим решение самого Диофанта. Обозначим первое число в виде произведения x на куб некоторого числа, например на $2^3 = 8$, то есть первое число будет $8x$. Положим второе число равным $x^2 - 1$. Ясно, что одно из условий задачи будет выполнено: произведение искомых чисел, сложенное с первым, равняется кубу некоторого числа. В самом деле, проверяя это, получим:

$$8x \cdot (x^2 - 1) + 8x = 8x^3.$$

Далее надо, чтобы выполнялось и другое условие, то есть, чтобы произведение искомых чисел, сложенное со вторым, равнялось также кубу некоторого числа. Для этого требуется, чтобы $8x \cdot (x^2 - 1) + x^2 - 1$ было кубом некоторого числа. Полагая, что куб этого числа равняется $(2x - 1)^3$, мы получим уравнение, из которого можно найти x: $8x \cdot (x^2 - 1) + x^2 - 1 = (2x - 1)^3$, откуда:

$x = 14/13$, следовательно, первое число будет: $8 \cdot 14/13 = 112/13$, а второе число будет равно: $(14/13)^2 - 1 = 196/169 - 1 = 27/169$. Проверьте, удовлетворяют ли найденные числа условию задачи.