Из истории математики.

Первой достаточно объемной книгой, в которой арифметика излагалась независимо от геометрии, было Введение в арифметику Никомаха (ок. 100 н.э.). В истории арифметики её роль сравнима с ролью Начала Евклида в истории геометрии. На протяжении более 1000 лет она служила стандартным учебником, поскольку в ней ясно, четко и всеобъемлюще излагалось учение о целых числах (простых, составных, взаимно простых, а также о пропорциях). Повторяя многие пифагорейские утверждения, Введение Никомаха вместе с тем шло дальше, так как Никомах видел и более общие отношения, хотя и приводил их без доказательства.

Многие математики, как настоящего, так и прошлого в юности прошли через увлечение задачами с целыми числами, а для некоторых из них это увлечение со временем превратилось в научные исследования по теории чисел. Например, Евклид считал очевидным, что с помощью умножения только простых чисел можно получить все натуральные числа, причём каждое натуральное число представимо в виде произведения простых чисел единственным образом (с точностью до порядка множителей).

Знаменательной вехой в алгебре александрийских греков стали работы Диофанта (ок. 250), в которых он не предлагал общих методов, а имел дело с конкретными целыми положительными и рациональными числами. Поэтому, обычно, произвольное неопределенное уравнение (но, как правило, все-таки с целыми коэффициентами) получает титул "диофантово", если хотят подчеркнуть, что его требуется решить в целых числах. А П. Ферму принадлежит ряд выдающихся открытий в теории диофантовых уравнений и в теории, связанной с делимостью целых чисел. Л. Эйлер продолжил исследования Ферма по теории делимости чисел и доказал теорему, обобщающую малую теорему Ферма. Ему принадлежат также и первые доказательства великой теоремы Ферма для показателя $n = 3$.

К началу 18 в. в науке о целых числах накопилось много фактов, позволивших создать стройные теории и общие методы решения задач теории чисел. Л. Эйлер был первым из математиков, кто стал создавать общие методы и применять др. разделы математики, в частности математический анализ, к решению задач теории чисел. К середине 19 в. с задачами в целых числах были связаны имена К. Гаусса, Ж. Лагранжа, А. Лежандра, П. Дирихле, П. Л. Чебышева, Ж. Лиувилля, Э. Куммера. Например, К. Гаусс создал теорию сравнений, называемую иначе арифметикой остаточных классов, с помощью которой были доказаны теорема о том, что простое число является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет вид $4n + 1$, и теорема о представимости каждого натурального числа суммой четырёх квадратов целых чисел.

Глава 1. Базовые задачи по теме «Решение задач в целых числах».

Решение задач в целых числах – один из самых красивых разделов математики. Ни один крупный математик не прошел мимо теории диофантовых уравнений. Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Чебышев оставили неизгладимый след в этой интересной теории.

«Анализ задачного материала по теме *решение задач в целых числах,* непосредственно связанной с тематикой задач C_6, показывает, что существует некоторое подмножество опорных задач (мы называем их *базовыми задачами*), которые неизбежно встают перед человеком, решающим любую задачу из названной темы. Представляется логичным выделить с максимальной полнотой перечень базовых задач, а также адекватные им универсальные и специальные математические учебные действия.

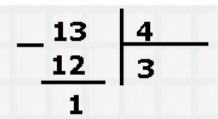
…построенный перечень базовых задач действительно является базисом в пространстве задач темы *решение задач в целых числах*. Фактически речь идет о проверки справедливости следующего утверждения: решение любой задачи данной темы представимо в виде цепочки последовательно разворачивающихся базовых задач (всех или некоторых), взятых в определенной последовательности». – А.А.Максютин[1]

. Задача о делении целого числа a на целое число b с остатком (нахождение неполного частного c и остатка r, таких, что выполняется равенство: $a = bc + r, 0 \le r < b$).

Способы действий:

- Деление чисел с остатком.

*Не всегда одно натуральное число делится нацело на другое натуральное число. Например: У нас есть **13** абрикосов. Как нам разделить их на четверых. Каждому достанется по три штуки и один абрикос останется. В данном случае:*



***13** — делимое.*

***4** — делитель.*
***3** — неполное частное.*
***1** — остаток.*

Остаток обязательно должен быть меньше делителя. Если в остатке нуль, то делимое делится на делитель нацело (без остатка).

Если нам надо найти делимое, зная делитель, неполное частное и остаток. Надо перемножить делитель и неполное частное и прибавить остаток. *3 • 4 + 1 = 13.*

Например: Запишите все натуральные числа, при делении которых на 16 получится остаток 11.

Решение: $a = 16n + 11$, *где* $n \in N$

- Проверка чисел на четность и нечетность.

Чётное число — целое число, которое делится без остатка на 2

Нечётное число — целое число, которое не делится без остатка на 2

Если m чётно, то оно представимо в виде m = 2k, а если нечётно, то в виде m = 2k + 1, где $k \in \mathbb{Z}$.

- Использование арифметики остатков.

Задача: При делении на 2 число дает остаток 1, а при делении на 3 - остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?

Решение.

Так как при делении целого числа на 6 можно получить один из остатков: 0, 1, 2, 3, 4 и 5, то множество целых неотрицательных чисел можно разбить на непересекающиеся подмножества чисел вида 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6y + 3, 6k + 4 и 6y + 5, где k = 0, 1, 2, 3, … .

Так как при делении на 2 данное число дает остаток 1, то оно нечетное, поэтому остается рассмотреть числа вида 6k + 1, 6y + 3 и 6y + 5.

Числа вида 6k + 1 при делении на 3 дают остаток 1, числа вида 6k + 3 кратны 3 и только числа вида 6k + 5 при делении на 3 дают остаток 2. Следовательно, число имеет вид 6y + 5, т.е. при делении на 6 дает остаток 5.

---

[1]«Эвристический путеводитель по методам решения задач в целых числах» - А.А. Максютин.

Ответ: Если при делении на 2 число дает остаток 1, а при делении на 3 - остаток 2, то при делении на 6 число остаток 5.

Пример: Пусть число $p > 3$ *является простым. Доказать, что а) имеет место представление* $p = 6k \pm 1$ *для некоторого* $k \in N$ *; б)* $(p^2 - 1) \vdots 24$.

Решение: а) Рассуждения проводим по модулю 6. Все натуральные числа распадаются на 6 классов $\{6k\}, \{6k+1\}, \{6k+2\}, \{6k+3\}, \{6k+4\}, \{6k+5\}$*. Простое число p может попасть только либо в класс* $\{6k+1\}$*, либо в класс* $\{6k+5\} = \{6k-1\}$*. Т.к. числа первого класса делятся на 2, 3, поэтому они составные. Числа третьего класса делятся на 2, числа четвертого класса делятся на 3, числа пятого класса делятся на 2.*

б) Т.к. $p = 6k \pm 1$*, то* $(6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 36k^2 \pm 12k = (12k(3k \pm 1)) \vdots 24$ *, т.к. первый множитель делится на 12, а третий на 2. ч.т.д.*

Используя арифметику остатка можно доказать <u>утверждение:</u> в числовом ряду степеней $n^1, n^2, n^3, \ldots, n^k, \ldots$ последняя цифра любого числа повторяется с периодом 4

- Метод математической индукции.

<u>Принцип математической индукции</u>

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

1) утверждение верно для n =1;

2) из справедливости утверждения для n = k, где k – любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа n = k + 1.

Например: доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1}) \vdots 133$ *для любого натурального числа n.*

Решение: 1) при n = 1.

$$(11^{3}+12^{3})=(11+12)(11^{2}-11\cdot 12+12^{2})=(23\cdot 133)\vdots 133.$$

2) предположим, что утверждение верно при n = k, т.е. $(11^{k+2}+12^{2k+1})\vdots 133$.

Докажем, что тогда утверждение верно и при n = k+1, т.е. докажем, что $(11^{k+3}+12^{2k+3})\vdots 133$.

$$(11^{k+3}+12^{2k+3})=11\cdot 11^{k+2}+12^{2}\cdot 12^{2k+1}=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Каждое слагаемое делится на 133, $\Rightarrow$ *сумма делится на 133, т.е.* $(11^{k+3}+12^{2k+3})\vdots 133$.

По принципу математической индукции делаем вывод, что требуемое утверждение доказано.

Задача определения вида числа: простое или составное.

<u>Способы действий:</u>

- Проверка признаков делимости на 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,25,125.

<u>Признак делимости на 2.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

<u>Признак делимости на 3.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

<u>Признак делимости на 4.</u> Для того чтобы натуральное число p*, содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа* p.

<u>Признак делимости на 5.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т.е. цифра единиц либо 0,либо 5).

<u>Признак делимости на 6.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 2 и на3.

<u>Признак делимости на 7.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечетных граней и со знаком «минус» для четных граней, делилась на 7.

<u>Признак делимости на 8.</u> Для того чтобы натуральное число p*, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа* p.

<u>Признак делимости на 9.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

<u>Признак делимости на 10.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

<u>Признак делимости на 11.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечетных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на четных местах, делилась на 11.

<u>Признак делимости на 13.</u> Для того чтобы натуральное число делилось на 13, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три

цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечетных граней и со знаком «минус» для четных граней, делилась на 13.

<u>*Признак делимости на 25.*</u> *Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее трех цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа p.*

<u>*Признак делимости на 125.*</u> *Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа p.*

- Проверка условий теоремы: если натуральное число N не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N}$ -, т.е. на $p \le \sqrt{N}$ -, то число – N простое.

Например: определить, число 2003 простое или составное.

Решение: $\sqrt{2003} \approx 44$ *. Проверим, делится ли число 2003 на 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43. Для проверки деления на 2,3,5,7,11,13 применяем признаки делимости. Деление на 17,19,23,29,31,37,41,43 проверяем при помощи деления уголком. 2003 не делится ни на одно из перечисленных простых чисел $\Rightarrow$ 2003 простое число.*

- Рассуждение от противного.

<u>Теорема</u>. *Простых чисел бесконечно множество.*

Доказательство: Предположим, что $p_1, p_2, ..., p_k$ - это все простые числа. Число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$ не делится на $p_1, p_2, ..., p_k$ $\Rightarrow$ нашлось еще одно простое число, поэтому предположение оказалось неверным и $\Rightarrow$ простых чисел бесконечно множество. ч.т.д.

Задача приведения натурального числа N к каноническому виду $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, ..., p_k^{\alpha_k}$ - простые числа.

<u>Способы действий:</u>

- Разложение на множители.
- Применение основной теоремы арифметики

<u>**Основная теорема арифметики:**</u> *1)Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители. 2) Если натуральное число разложено на простые множители, то такое разложение единственно (т.е. любые два разложения числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей).*

Пример 1: Разложить на простые множители число 16 380.

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 16380 & 2 \\ 8190 & 2 \\ 4095 & 3 \\ 1365 & 3 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$16380 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

Пример 2: Привести к каноническому виду число 100!.

Решение: $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot \ldots \cdot 95\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100$

или $100! = 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e\cdot 13^f\cdot \ldots \cdot 83^x\cdot 89^y\cdot 97^z$.

где

$$a = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

$$b = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right] = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$$

$$c = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{5^2}\right] = 20 + 4 = 24$$

$$d = \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{100}{7^2}\right] = 14 + 2 = 16$$

$$e = \left[\frac{100}{11}\right] = 9$$

$$f = \left[\frac{100}{13}\right] = 7$$

....

$$x = \left[\frac{100}{83}\right] = 1$$

$$y = \left[\frac{100}{89}\right] = 1$$

$$z = \left[\frac{100}{97}\right] = 1$$

Ответ: $100! = 2^{97}\cdot 3^{48}\cdot 5^{24}\cdot 7^{16}\cdot 11^{9}\cdot 13^{7}\cdot \ldots \cdot 89^{1}\cdot 97^{1}$.

Задача нахождения НОК, НОД двух и более чисел.

Способы действий:

- Использование основной теоремы арифметики.

а) Общим кратным нескольких чисел *называется число, которое делится на каждое из этих чисел. Например, числа 9, 18 и 27 имеют общее кратное 108. Но 54 и 810 – тоже их общие кратные. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее, в данном случае это 54. Это число называется* **наименьшим общим кратным (НОК).**

Алгоритм нахождения НОК

Чтобы найти наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел надо:

1) представить каждое число как произведение его простых множителей, например:

$126 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7, \quad 24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

2) записать степени всех простых множителей:

$126 = 2\cdot 3^2\cdot 7, \quad 24 = 2^3\cdot 3$

3) выписать все простые делители (множители) каждого из этих чисел;

$2,3,7$ *и* $2,3$

4) выбрать наибольшую степень каждого из них, встретившуюся во всех разложениях этих чисел;

$2^3, 3^2, 7$

5) перемножить эти степени:

$8 \cdot 9 \cdot 7 = 504$ *- искомый результат.*

б) Общим делителем нескольких чисел *называется число, которое является делителем каждого из них. Например, числа 2250, 3250, 4250 имеют общие делители, например, 2,5,10. Среди всех общих делителей* **всегда есть наибольший***, в данном случае это 250. Это и есть* **наибольший общий делитель (НОД).**

Алгоритм нахождения НОД

Чтобы найти наибольший общий делитель (НОД) нескольких чисел надо:

1) представить каждое число как произведение его простых множителей, например:

$192 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

2) записать степени всех простых множителей:

$192 = 2^6 \cdot 3$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

3) выписать все общие делители (множители) этих чисел;

$2, 3$.

4) выбрать наименьшую степень каждого из них, встретившуюся во всех произведениях;

$2^2, 3$.

5) перемножить эти степени:

$4 \cdot 3 = 12$ *- искомый результат.*

Из а) *и* б) $\Rightarrow$ $a \cdot b = НОК(a, b) \cdot НОД(a, b)$.

- Алгоритм Евклида.

Идея этого алгоритма основана на том свойстве, что если M>N, то

НОД(M, N) = НОД(M - N, N).

Иначе говоря, НОД двух натуральных чисел равен НОД их положительной разности (модуля их разности) и меньшего числа.

Легко доказать это свойство. Пусть К - общий делитель М и N (М> N). Это значит, что М = mК, N = nК, где m, n - натуральные числа, причем m > n. Тогда М - N = К(m - n), откуда следует, что К - делитель числа М - N. Значит, все общие делители чисел М и N являются делителями их разности М - N, в том числе и наибольший общий делитель.

Второе очевидное свойство:

НОД(M, M) = M.

Для "ручного" счета алгоритм Евклида выглядит так:

1) если числа равны, то взять любое из них в качестве ответа, в противном случае продолжить выполнение алгоритма;

2) заменить большее число разностью большего и меньшего из чисел;

3) вернуться к выполнению п. 1.

Рассмотрим этот алгоритм на примере M=32, N=24:

M	*32*	*8*	*8*	*8*
N	*24*	*24*	*16*	*8*

Получили: НОД(32, 24) =НОД(8, 8) = 8, что верно.

Нетрудно доказать следующие утверждения:

- *НОД (a;b) = НОД (a;a + b)*
- *НОД (a;b) = НОД (a;a −b)*

- *Если целые числа a и b взаимно просты, то их сумма a + b и произведение ab также являются взаимно простыми числами.*
- *Если целые числа a и b являются взаимно простыми, то НОД (a + b;a −b) равен 1 или 2.*
- *Любые два последовательных натуральных числа взаимно просты.*
- *Наибольший общий делитель любых двух последовательных четных натуральных чисел равен 2.*
- *Любые два последовательных нечетных натуральных числа взаимно просты.*
- *Если целые числа a и b являются взаимно простыми, то НОД (a + b;a2 −ab + b2) равен 1или 3.*
- *Если натуральные числа m и n взаимно просты, то НОД (m + n;m2 + n2) равен 1 или 2.*

1) Задача нахождения числа делителей произвольного натурального числа N (прямая задача).

<u>Способы действий:</u>

- Применение основной теоремы арифметики.
- Правила умножения.

Правило умножения *для комбинаций из двух элементов: если первый элемент в комбинации можно выбрать a способами, после чего второй элемент - b способами, то общее число комбинаций из двух элементов будет $a \cdot b$.*

Правило умножения *в общем виде: если нам нужно сформировать комбинацию из* k *элементов и при этом первый элемент в комбинации можно выбрать* n_1 *способами, после чего второй элемент -* n_2 *способами, после чего третий -* n_3 *способами и так далее, то всего таких комбинаций будет* $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Например: 1) Найти количество делителей числа 10!

Решение: $10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$ *или* $10! = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$

Любой делитель можно вычислить так: $2^x\cdot 3^y\cdot 5^z\cdot 7^\alpha$ *, где* $x \in \{0,1,2,\ldots,8\}$ *- наибольшее кол-во= 9,* $y \in \{0,1,\ldots,4\}$ *-наибольшее кол-во=5,* $z \in \{0,1,2\}$ *- наибольшее кол-во=3,* $\alpha \in \{0,1\}$ *- наибольшее кол-во=2.*

Итак, используя правило умножения кол-во делителей числа 10! равно $9\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 270$.

2) Для произвольного числа N *определить количество делителей.*

Решение: $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$

$\alpha_1 \in \{0,\ldots,\alpha_1\}$ *- кол-во* $= (\alpha_1 + 1)$

$\alpha_2 \in \{0,\ldots,\alpha_2\}$ *- кол-во* $= (\alpha_2 + 1)$

$\alpha_k \in \{0,\ldots,\alpha_k\}$ *- кол-во* $= (\alpha_k + 1)$

Итак, число N *имеет количество делителей равное* $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots\cdot(\alpha_k+1)$

2) Задача нахождения числа N по числу его делителей (обратная задача).

<u>Способы действий:</u>

- Определение числа по количеству его делителей.

Например: найдите число, которое имеет ровно а) 5 делителей? б) 7делителей? в) 6 делителей?

Решение: а) Пусть искомое число N .

Представим его в каноническом виде $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *тогда его количество делителей равно* $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1) = 5 = 5 \cdot 1$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1+1)=5$$

$$\alpha_1 = 4$$

Итак, число p^4 *- имеет ровно 5 делителей, где* p *- простое число.*

в) (аналогично пункту а)

1) $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)=6=2\cdot 3$ *или 2)* $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)=6=6\cdot 1$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+1=2\\ \alpha_2+1=3\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1+1=3\\ \alpha_2+1=2\end{cases} \qquad\qquad (\alpha_1+1)=6$$

$$\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=2\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1=2\\ \alpha_2=1\end{cases} \qquad\qquad \alpha_1=5$$

Итак, числа p^5, $p_1^1 \cdot p_2^2$, $p_1^2 \cdot p_2^1$ *- имеют ровно 6 делителей, где* p *- простое число.*

. Задача нахождения целых решений линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax+by=c$

<u>Способы действий:</u>

- Нахождение частного решения (может быть и угадывание) и применение теоремы о виде общего решения.

$ax+by=c$ *(1)*

Если с не делится нацело на НОД (a,b), *то уравнение (1) не разрешимо в целых числах. Справедливо и обратное: если в уравнении* $ax+by=c$ *выполняется деление с на НОД* (a,b), *то оно разрешимо в целых числах.*

Пусть (x_0, y_0) *- частное решение уравнения* $ax+by=c$. *Тогда все его решения находятся по формулам:*
$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{b}{(a,b)}n \\ y = y_0 + \dfrac{a}{(a,b)}n \end{cases}, \text{где } n \in Z .$$

Чтобы найти решение уравнения $ax+by=c$ *при взаимно-простых а и* b , *нужно сначала найти решение* (x_0, y_0) *уравнения ах + ву = 1; числа* cx_0, cy_0 *составляют решение уравнения* $ax+by=c$.

- Применение метода перебора и метода спуска.

Например: 1) В клетке сидят кролики и фазаны, всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других?

Решение: Составляется уравнение с двумя неизвестными переменными, в котором х – число кроликов, у – число фазанов: 4х + 2у = 18, или 2х + у = 9.

Выразим y через x: y = 9 – 2x.

Далее воспользуемся методом перебора:

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

Таким образом, задача имеет четыре решения.

Ответ: (1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1).

2) Подданные привезли в дар шаху 300 драгоценных камней: в маленьких шкатулках по 15 штук в каждой и в больших – по 40 штук. Сколько было тех и других шкатулок, если известно, что маленьких было меньше, чем больших?

Решение: Обозначим за x количество маленьких шкатулок, а за y – количество больших. 15x + 40y = 300. Сокращаем на 5: 3x + 8y= 60. Выражаем переменную x: $x = \frac{60 - 8y}{3} = \frac{60 - 6y - 2y}{3} = 20 - 2y - \frac{2y}{3}$. *Чтобы значение последней дроби было целым числом, необходимо, чтобы 2y было кратным 3, т.е. 2y = 3z. Теперь выразим y и выделим целую часть:* $y = \frac{3z}{2} = \frac{2z + z}{2} = z + \frac{z}{2}$. *Потребуем, чтобы z было кратно 2: z = 2u.*

Выразим переменные x и y через u: $y = 2u + \frac{2u}{2} = 2u + u = 3u$ *;*

$$x = 20 - 2 \cdot 3u - \frac{2 \cdot 3u}{3} = 20 - 6u - \frac{6u}{3} = 20 - 6u - 2u = 20 - 8u$$

Составим и решим систему неравенств: $\begin{cases} 20 - 8u > 0 \\ 3u > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u < 20 \\ u > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 2{,}5 \\ u > 0 \end{cases}$.

Целые решения системы: 1 и 2. Осталось найти x и y при u = 1;2

$\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 3 \end{cases}$ *- не удовлетворяет условию задачи*

$\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 6 \end{cases}$

Ответ: 4 маленькие шкатулки и 6 больших шкатулок.

Задача нахождения целых решений квадратных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

<u>Способы действий:</u>

- Разложение на множители левой части.

Например: Решить уравнение в целых числах

$$2x^2 - 7xy + 5y^2 - 3x + 3y = 8.$$

Решение: Разложим левую часть на множители способом группировки

$$2x^2 - 7xy + 5y^2 - 3x + 3y = 2x^2 - 2xy - 5xy + 5y^2 - 3x + 3y =$$
$$= 2x(x - y) - 5y(x - y) - 3(x - y) = (x - y)(2x - 5y - 3)$$

Уравнение принимает вид $(x - y)(2x - 5y - 3) = 8$.

Число 8 можно разложить на два целых множителя четырьмя способами

$8 = 1 \cdot 8 = 8 \cdot 1 = 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$. *Тогда решение уравнения сводится к совокупности 4 систем уравнений.*

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1\\2x-5y-3=8\end{cases}\\\begin{cases}x-y=8\\2x-5y-3=1\end{cases}\\\begin{cases}x-y=2\\2x-5y-3=4\end{cases}\\\begin{cases}x-y=4\\2x-5y-3=2\end{cases}\end{array}\right.$$

Все системы имеют целые решения.

Ответ: $(-2;3),\ (12;4),\ (1;-1),\ (5;1)$.

- Рассмотрение уравнения как квадратного относительно одной из переменных с наложением дополнительных ограничений.

Например: Решить уравнение $2x^2-2xy+9x+y=2$ *в целых числах.*

Решение: Перепишем уравнение в виде $2x^2-x(2y-9)+y-2+a=a$ *и разложим левую часть уравнения на множители, как квадратный трехчлен относительно* x.

$D=4y^2-44y+97-8a$. *Очевидно, если* $97-8a=121$*, то* D *будет полным квадратом. При этом* $a=-3$. *Получаем* $x_1=0{,}5$ *и* $x_2=y-5$.

Уравнение принимает вид $(2x-1)(x-y+5)=-3$.

Число -3 можно разложить на два целых множителя четырьмя способами $-3=-1\cdot3=1\cdot(-3)=3\cdot(-1)=-3\cdot1$. *Тогда решение уравнения сводится к совокупности 4 систем уравнений.*

$$\begin{cases}2x-1=-1\\x-y+5=3\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-1=1\\x-y+5=-3\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-1=3\\x-y+5=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-1=-3\\x-y+5=1\end{cases}$$

Решая эти системы, получаем решение исходного уравнения.

Ответ: $(0;2),\ (1;9),\ (2;8),\ (-1;3)$.

- Частный прием: сведение к однородному уравнению в случае $d=0$.

Например: Найти натуральные решения уравнения $7x^2+5xy=12y^2$.

Решение: Приведем уравнение к виду однородного $7x^2+5xy-12y^2=0$.

1) Если $x=0\Rightarrow y=0$ *пара чисел* $(0,0)$ *не является решением, т.к.* $0\notin N$

2) $x\neq0$*, тогда разделим уравнение на* x^2 *и получаем*

$$7+5\frac{y}{x}-12\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$$

Введем новую переменную $\frac{y}{x}=a$ *и решим полученное квадратное уравнение*

$12a^2-5a-7=0$, $D=25+336=361$, $a_1=-\frac{7}{12}$, $a_2=1$.

Вернемся к обозначению $\frac{y}{x} = -\frac{7}{12} \Rightarrow y = -\frac{7}{12}x$ *- не удовлетворяет условию*

$$\frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x.$$

Ответ: (t, t), *где* $t \in N$

Задача нахождения целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными различного вида.

<u>Способы действий:</u>

- Рассуждение по выбранному модулю.
- Применение арифметики остатка.

Нетрудно доказать следующие утверждения:

- *Если остаток от деления* a_1 *на* b *равен* r_1, *а остаток от деления* a_2 *на* b *равен* r_2, *то остаток от деления* $a_1 + a_2$ *на* b *равен остатку от деления* $r_1 + r_2$ *на* b.
- *Остаток от деления на 3 числа* 5^k *равен 1, если* k *четно, и 2, если* k *нечетно.*

- *Квадрат любого натурального числа или делится на 2 (на 4), когда само число чётное, или при делении на 2 (на 4) даёт в остатке 1.*
- *Квадрат любого натурального числа или делится на 3, когда на 3 делится само число, или при делении на 3 даёт в остатке 1.*
- *Квадрат любого натурального числа или делится на 5, когда на 5 делится само число, или при делении на 5 даёт в остатке 1 или 4.*
- *Квадрат любого натурального числа или делится на 7, когда на 7 делится само число, или при делении на 7 даёт в остатке 1, 2 или 4.*
- *Разность квадратов двух целых чисел одинаковой чётности делится на 4.*
- *Число* 4^n *при делении на 3 дает в остатке 1.*
- *Число* 5^{2n} *при делении на 3 дает в остатке 1, а* 5^{2n+1} *дает в остатке 2.*
- *При делении на 3 куб целого числа и само число дают одинаковые остатки (0, 1, 2).*
- *При делении на 9 куб целого числа дает в остатке 0, 1, 8.*
- *При делении на 4 куб целого числа дает в остатке 0, 1, 3.*
- *Число* N^5 *оканчивается на ту же цифру, что и число N.*

Например: Решите уравнение $2^x - 3^y = 1$ *в натуральных числах.*

Решение: Рассмотрим случай $x = 1$. *Тогда* $y = 0$. *Поскольку 0 не является натуральным числом, то в этом случае рассматриваемое уравнение не имеет решений.*

Рассмотрим теперь случай $x = 2$. *Тогда* $y = 1$. *Итак мы нашли решение* $x = 2, y = 1$. *Пусть теперь* $x \geq 3$. *Перепишем уравнение в виде* $2^x = 3^y + 1$. *Левая часть этого уравнения делится на 8, тогда и правая часть будет делиться на 8.*

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного y. Пусть сначала $y = 2k + 1$. *Тогда уравнение примет вид* $2^x = 3 \cdot 9^k + 1$ *или* $2^x = 3 \cdot (8+1)^k + 1$. *С помощью формулы бинома Ньютона получаем соотношение* $(8+1)^k = 8 \cdot l + 1$ *для некоторого* $l \in N$. *Теперь решаемое уравнение может быть переписано в виде* $2^x = 24 \cdot l + 4$. *Но правая часть этого равенства на 8 не делится. Поэтому y не может быть нечетным.*

Пусть теперь $y = 2k$. *Тогда уравнение принимает вид* $2^x = 9^k + 1$. *Это уравнение перепишем в виде* $2^x = (8+1)^k + 1$. *С помощью представления* $(8+1)^k = 8 \cdot l + 1$ *запишем* *последнее уравнение в виде* $2^x = 8l + 1$. *Но правая часть этого равенства не 8 не делится. Поэтому у не может быть четным.*

Таким образом, единственным решением рассматриваемого уравнения будет решение $x = 2, y = 1$.

Ответ: $x = 2, y = 1$.

Задача нахождения сумм различных числовых последовательностей (суммы первых степеней первых *n* натуральных чисел, суммы вторых, третьих степеней первых *n* натуральных чисел, суммы прогрессий, суммирование дробей различного рода, обращение периодических дробей в рациональную дробь).

Способы действий:

- Применение аппарата прогрессий, уравнений.

Например: Целые числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, а числа 5x + 3, y^2 *и 3z + 5 - арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите x, y и z.*

Решение: Используя характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий составим систему уравнений.

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ 2y^2 = 5x + 3z + 8 \end{cases} \Rightarrow 2xz = 5x + 3z + 8 \Rightarrow 2z = 5 + \frac{31}{2x - 3}.$$

Учитывая условие, что $x, y, z \in Z$ *приходим к выводу, что выражение* $\frac{31}{2x - 3}$ *принимает целые значения, т.е. разность 2x −3 является делителем 31. Итак, возможны лишь случаи 2x −3 =* ± 1*;* ± 31*. Осуществляя их перебор с учетом требований xz ≥0, y ∈ Z,*

имеем единственную возможность x = 2, z = 18, y^2 *= 36, приводящую к ответу.*

Ответ: (2;6;18), (2;−6;18).

- Метод математической индукции.
- Составление и решение рекуррентных соотношений.

Например: Докажите равенство $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$. *(1)*

Решение: Докажем методом математической индукции, что

1) при n = 1. $1^3 = 1^2$; $1 = 1$.

2) предположим, что равенство верно при n = k, т.е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + k)^2. \quad (2)$$

Докажем, что тогда проверяемое равенство верно и при n = k+1, т.е. докажем, что верно равенство $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1))^2$. *(3)*

или, что тоже самое, $(1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1))^2 - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3) = (k+1)^3$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1))^2 - (1 + 2 + 3 + \dots + k)^2 = (k+1)^3$$

$$(1+2+3+\ldots+k+(k+1))^2-(1+2+3+\ldots+k)^2=(1+2+3+\ldots+k+(k+1)-(1+2+3+\ldots+k))(1+2+3+\ldots+k+(k+1)+1+2+3+\ldots+k)=(k+1)^3$$

$$(k+1)(2+4+6+\ldots+2k+(k+1))=(k+1)^3$$

$$(k+1)(2(1+2+3+\ldots+k)+(k+1))=(k+1)^3$$

$$(k+1)\left(2\cdot\frac{1+k}{2}\cdot k+(k+1)\right)=(k+1)^3$$

$$(k+1)(k(k+1)+(k+1))=(k+1)^3$$

$$(k+1)(k^2+2k+1)=(k+1)^3$$

$$(k+1)(k+1)^2=(k+1)^3$$

$$(k+1)^3=(k+1)^3$$

Итак, из равенства (2) вытекает равенство (3).

Оба условия принципа математической индукции выполняются, значит, равенство (1) справедливо для любого натурального числа n.

Задача математического моделирования в виде диофантовых уравнений (неравенств) и их систем.

<u>Способы действий:</u>

- Знаково-символические действия.

Например: Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ *и* $\frac{97}{36}$ *найдите такую, знаменатель которой минимален.*

Решение: Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть дробь $\frac{m}{n}$ *удовлетворяет условию задачи. Тогда* $m, n \in N$ *, имеет место неравенство* $\frac{97}{36} < \frac{m}{n} < \frac{96}{35}$ *и* n *- минимально.*

Последнее неравенство можно переписать в виде $\frac{35}{96} < \frac{n}{m} < \frac{36}{97}$*, откуда следует* $\frac{35}{96}m < n < \frac{36}{97}m$ *. Нам надо найти наименьшее значение m, при котором в интервале* $\left(\frac{35}{96}m, \frac{36}{97}m\right)$ *попадает натуральное число. Тогда это натуральное число и будет искомым значением n.*

Далее надо проводить численные эксперименты, подставляя поочередно значения $m=1, m=2$ *и т.д. в последнее неравенство. Надо следить за тем, содержит ли полученный интервал целое число. Наблюдения позволяют выдвинуть гипотезу, что начиная с* $m=3$ *целая часть границ интервала сохраняет постоянное значение для трех последовательных значений m, что позволяет уменьшить число вычислительных проб. При* $m=19$ *получим* *первый интервал, содержащий целое число 7. Второй такой интервал получим при* $m = 27$ *,* *он содержит второе целое число 10. Искомая дробь имеет вид* $\frac{19}{7}$.

Ответ: $\frac{19}{7}$.

- Геометрические интерпретации
- Символически-образные переформулировки условия в комбинированных задачах с модулем, параметром.

Решение задачи о принадлежности данного числа данному числовому множеству (*N, Z, Q, R, C*).

Решение задач в целых числах.

2.1. Примеры решения задач в целых числах.

Пример 1. Рассмотрим все пятизначные числа, получаемые перестановкой цифр числа 12345. докажите что сумма всех чисел (включая исходное число) делится на 11111.

Решение: Сумма цифр 1+2+3+4+5=18. всего перестановок 5!=120. складывая столбиком 120 слагаемых, получим над каждым разрядом одну и ту же комбинацию цифр $18 \cdot 24 = 432$ *. Таким образом искомая сумма состоит из 432 единиц, 432 десятков, 432 сотен, 432 тысяч и 432десятков тысяч. Такое число равно* $432 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 432 \cdot 11111$. *ч.т.д.* (Использовали Б35)

Пример 2. Найдите количество нулей, которыми оканчивается десятичная запись числа 2009!.

Решение: Разложим 2009! на простые множители и представим в каноническом виде. $2009! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot \ldots \cdot 41^t \cdot 43^p \cdot 47^r \cdot \ldots \cdot 2003^1$.

$2 \cdot 5 = 10$ *, то есть эта комбинация дает один нуль. c<a, отсюда следует что количество нулей равно числу с.*

$$c = \left[\frac{2009}{5}\right] + \left[\frac{2009}{5^2}\right] + \left[\frac{2009}{5^3}\right] + \left[\frac{2009}{5^4}\right] = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$$

Ответ: 500 нулей. (Использовали Б32)

Пример 3. Существует ли квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен 20092007?

Решение: Допустим, что $D = b^2 - 4ac = 20092007$ *. Решим полученное уравнение в целых числах.* $b^2 = 4ac + 20092007 = 4(ac + 5023001) + 3$ *- это число при делении на 4 дает остаток 3. Рассуждая по модулю 4, все числа делятся на 4 класса:* $4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3$.

$(4k)^2 = 16k^2 \vdots 4\ (ост\ 0)$

$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1 \vdots 4(ост\ 1)$.

$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) \vdots 4(ост\ 0)$.

$(4k+3)^2 = 16k^2 + 48k + 9 = 4(4k^2 + 12k + 2) + 1 \vdots 4(ост\ 1)$

Квадрат любого числа при делении на 4 имеет остаток 0 или 1, а т.к. число $4ac + 20092007$ *при делении на 4 имеет остаток 3, то оно не может являться точным квадратом* (b^2). *Итак, дискриминант трехчлена с целыми коэффициентами не может равняться числу 20092007.*

Ответ: нет. (Использовали БЗ1, БЗ8)

<u>Пример 4.</u> Решите в натуральных числах уравнение $5x + 8y = 39$.

Решение: Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства

$$\begin{cases} 5x = 39 - 8y \ge 0 \\ 8y = 39 - 5x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le 4 \\ x \le 7 \end{cases}.$$

Проведем перебор по неизвестной y. Если y = 1, то x = 6,2 не является натуральным числом. Если y = 2, то x = 4,6 не является натуральным числом. Если y = 3, то x = 3. Если y = 4, то x = 1,4 не является натуральным числом.

Ответ: (3; 3). (Использовали БЗ6)

<u>2.2.</u> Решения заданий типа C_6

1) **C_6.** Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

Решение: Пусть искомое число N .

Представим его в каноническом виде $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *тогда его количество делителей равно* $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 15$

1) $15 = 15 \cdot 1$

$\Downarrow$

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 15 \cdot 1$

$\Downarrow$

$(\alpha_1 + 1) = 15$

$\alpha_1 = 14$

Итак, число p^{14} - *имеет ровно 15 делителей, где* p - *простое число. Но не одно из них не может оканчиваться 0.*

2) $15 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$

$\Downarrow$

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 5 \cdot 3$ *и* $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 3 \cdot 5$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 5 \\ \alpha_2 + 1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3 \\ \alpha_2 + 1 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 \end{cases}$

Итак, числа $N = p_1^4 \cdot p_2^2$, $N = p_1^2 \cdot p_2^4$ - *имеют ровно 15 делителей, где* p - *простое число. По условию число* N должно оканчиваться 0.$\Rightarrow$ p_1 и p_2 должны равняться 2 и 5.

$$2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400 \quad \text{и} \quad 2^2 \cdot 5^4 = 4 \cdot 625 = 2500$$

Ответ: 400 и 2500. (Использовали БЗ5 (обратную задачу))

2) **C$_6$.** Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

Решение: При делении на 3 левая часть уравнения дает остаток 1, правая часть то же должна давать тот же остаток при делении на3, т.е. 1$\Rightarrow$ *число* k *четное.* $(k = 2k_0)$

При делении на 4 правая часть дает остаток 1, левая часть то же должна давать тот же остаток при делении на 4, т.е.1, а это возможно, если число m *четное.* $(m = 2m_0)$

Итак, $4^n = 5^{2k_0} - 3^{2m_0}$

$2^{2n} = (5^{k_0} - 3^{m_0})(5^{k_0} + 3^{m_0})$

$2^p \cdot 2^q = (5^{k_0} - 3^{m_0})(5^{k_0} + 3^{m_0})$, $\quad p + q = 2n$

Поэтому $2^p = (5^{k_0} - 3^{m_0})$ *(1)*

$2^q = (5^{k_0} + 3^{m_0})$ *(2)*

Вычитая из (1) равенства (2) получаем $3^{m_0} = \frac{1}{2}(2^q - 2^p) = 2^{q-1} - 2^{p-1}$. *Значит* $2^{q-1} - 2^{p-1}$ - *нечетное число* $\Rightarrow$ $p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow 2^p = 2$ *и* $3^{m_0} = 2^{q-1} - 1$. *Из этого получается, что число* $q - 1$ - *четное(иначе правая часть не делится на 3) и обозначим* $q - 1 = 2s$.

$3^{m_0} = 2^{2s} - 1$, $3^{m_0} = (2^s - 1)(2^s + 1)$ *- правая часть – это произведение двух множителей отличающихся на 2 и является степенью числа 3, следовательно эти множители 1 и3.*

Получаем, что $s = 1$, *а* $q = 2s + 1 = 2 + 1 = 3$

$$3^{m_0} = 2^2 - 1 = 3$$

$$m_0 = 1,\ a\ m = 2$$

$p + q = 2n = 1 + 3 = 4 \Rightarrow n = 2$. *Понятно, что и* $k = 2$.

Ответ: $m = n = k = 2$. (Использовали БЗ8)